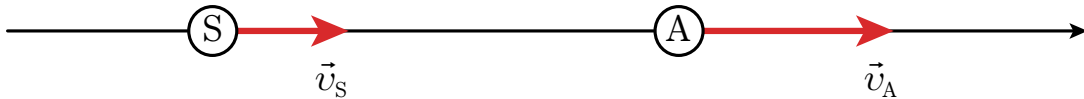


Απόδειξη της σχέσης των ηχητικών συχνοτήτων στο φαινόμενο Doppler(*)

Μια πηγή (S) που εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S κι ένας παρατηρητής (A) κινούνται πάνω σε μία ευθεία γραμμή. Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή οι ταχύτητές τους είναι \vec{v}_S και \vec{v}_A αντίστοιχα (σχήμα 1).



Σχήμα 1

Να δείξετε ότι η συχνότητα f_A του ήχου που μετρά ο παρατηρητής (A) δίνεται από τη σχέση:

$$f_A = \frac{v_{\eta\chi} - v_A}{v_{\eta\chi} - v_S} f_S$$

όπου v_S η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της πηγής
 v_A η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του παρατηρητή
 $v_{\eta\chi}$ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του ήχου

Οι ταχύτητες αναφέρονται ως προς τον αέρα που για ευκολία θεωρούμε ότι είναι ακίνητος ως προς τη γη. Άρα οι ταχύτητες \vec{v}_S και \vec{v}_A αναφέρονται τελικά ως προς τη Γη.

Το μέτρο της ταχύτητας του ήχου είναι μεγαλύτερο από τα μέτρα των δύο άλλων ταχυτήτων. Δηλαδή ισχύει $|v_{\eta\chi}| > |v_S|$ και $|v_{\eta\chi}| > |v_A|$

Απόδειξη

Την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πυκνωμάτων των μορίων του αέρα σε κάποια περιοχή «μπροστά» ή «πίσω» από την πηγή, η πηγή την μετρά ως μήκος κύματος λ_S του ηχητικού κύματος, ενώ ο παρατηρητής τη μετρά ως μήκος κύματος λ_A .

Όμως δύο ή περισσότεροι νευτώνειοι παρατηρητές όταν μετράνε την απόσταση ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένα «αντικείμενα» ή ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένα γεγονότα πρέπει να βρίσκουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Η απόσταση δηλαδή μεταξύ δύο διαδοχικών πυκνωμάτων δεν είναι δυνατό να είναι άλλη για την πηγή S και άλλη για τον παρατηρητή A (ή για οιονδήποτε άλλον παρατηρητή που μετρά αυτή τη συγκεκριμένη απόσταση). Και τούτο γιατί δεν υπάρχει μηχανισμός στη Φυσική του Νεύτωνα που να διαφοροποιεί μεταξύ παρατηρητών το αποτέλεσμα της μέτρησης μιας απόστασης.

(*) Η ιδέα για μια απευθείας απόδειξη της γενικής σχέσης Doppler χωρίς να διακρίνουμε περιπτώσεις, όπως και η αρχική υλοποίηση αυτής της ιδέας ανήκει στον φίλο Πολυνίκη Λατζώνη

Αυτή η ταυτότητα του αποτελέσματος της μέτρησης της οιαδήποτε απόστασης ισχύει ανεξάρτητα από την ταχύτητα των παρατηρητών, ανεξάρτητα από τη θέση τους και ανεξάρτητα από την περιοχή στην οποία αναφέρεται η μέτρηση.

Επομένως για τα μετρούμενα μήκη κύματος ισχύει

$$\lambda_S = \lambda_A \quad (1)$$

Η ταχύτητα διάδοσης των (μονοχρωματικών) ηχητικών κυμάτων που μετρά η πηγή S είναι η (σχετική) ταχύτητα διάδοσης του ήχου ως προς την πηγή $v_{\eta\zeta} - v_S$, ενώ η ταχύτητα διάδοσης των (μονοχρωματικών) ηχητικών κυμάτων που μετρά ο παρατηρητής A είναι $v_{\eta\zeta} - v_A$.

Ο θεμελιώδης νόμος της κυματικής εφαρμοζόμενος από την πηγή (S) και τον παρατηρητή (A) δίνει αντίστοιχα:

$$|v_{\eta\zeta} - v_S| = \lambda_S \cdot f_S \quad (2)$$

$$|v_{\eta\zeta} - v_A| = \lambda_A \cdot f_A \quad (3)$$

Η σχέση (1) λόγω των (2) και (3) δίνει:

$$\frac{|v_{\eta\zeta} - v_S|}{f_S} = \frac{|v_{\eta\zeta} - v_A|}{f_A}$$

και συνεπώς

$$f_A = \frac{|v_{\eta\zeta} - v_A|}{|v_{\eta\zeta} - v_S|} \cdot f_S \quad (4)$$

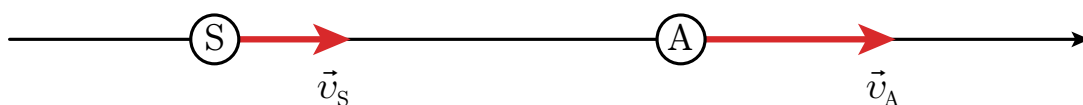
Επειδή $|v_{\eta\zeta}| > |v_S|$ και $|v_{\eta\zeta}| > |v_A|$ στην ποσότητα $v_{\eta\zeta} - v_S$ καθώς και στην ποσότητα $v_{\eta\zeta} - v_A$ θα επικρατεί το πρόσημο της $v_{\eta\zeta}$ με αποτέλεσμα οι δύο αυτές ποσότητες θα είναι πάντα ομόσημες.

Άρα το κλάσμα $\frac{v_{\eta\zeta} - v_A}{v_{\eta\zeta} - v_S}$ είναι πάντα θετικό οπότε η σχέση (4) καταλήγει στην

$$f_A = \frac{v_{\eta\zeta} - v_A}{v_{\eta\zeta} - v_S} \cdot f_S \quad (5)$$

1ο παράδειγμα:

Πηγή και παρατηρητής κινούνται όπως στο σχήμα 2



Σχήμα 2

Επιλέγω ως θετική φορά προς τα δεξιά. Τότε η σχέση (5) δίνει

$$f_A = \frac{(+|v_{\eta z}|) - (+|v_A|)}{(+|v_{\eta z}|) - (+|v_S|)} \cdot f_S = \frac{|v_{\eta z}| - |v_A|}{|v_{\eta z}| - |v_S|} \cdot f_S$$

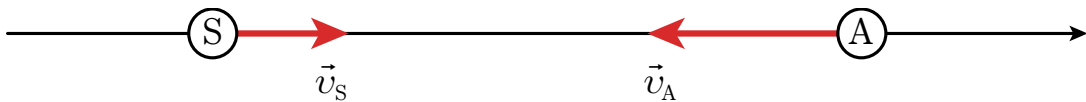
Επιλέγω ως θετική φορά εκείνη προς τα αριστερά. Τότε η σχέση (5) δίνει

$$f_A = \frac{-|v_{\eta z}| - (-|v_A|)}{-|v_{\eta z}| - (-|v_S|)} \cdot f_S = \frac{|v_{\eta z}| - |v_A|}{|v_{\eta z}| - |v_S|} \cdot f_S$$

Παρατηρούμε ότι καταλήγουμε στην ίδια (γνωστή μας και από το Λύκειο) σχέση η οποία, όπως ήταν αναμενόμενο (μιας και χρησιμοποιήθηκαν αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων), δεν εξαρτάται από την επιλογή της φοράς που θα υιοθετήσουμε ως θετική.

2ο παράδειγμα:

Πηγή και παρατηρητής κινούνται όπως στο σχήμα 3



Σχήμα 3

Επιλέγω ως θετική φορά προς τα δεξιά. Τότε η σχέση (5) δίνει

$$f_A = \frac{(+|v_{\eta z}|) - (-|v_A|)}{(+|v_{\eta z}|) - (+|v_S|)} \cdot f_S = \frac{|v_{\eta z}| + |v_A|}{|v_{\eta z}| - |v_S|} \cdot f_S$$

Επιλέγω ως θετική φορά εκείνη προς τα αριστερά. Τότε η σχέση (5) δίνει

$$f_A = \frac{-|v_{\eta z}| - (+|v_A|)}{-|v_{\eta z}| - (-|v_S|)} \cdot f_S = \frac{|v_{\eta z}| + |v_A|}{|v_{\eta z}| - |v_S|} \cdot f_S$$

Παρατηρούμε ότι καταλήγουμε στην ίδια (γνωστή μας και από το Λύκειο) σχέση η οποία όπως ήταν αναμενόμενο (μιας και χρησιμοποιήθηκαν αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων) δεν εξαρτάται από την επιλογή της φοράς που θα υιοθετήσουμε ως θετική.

Παρατηρήσεις:

α) Στη σχέση $v = \lambda f$ υπάρχουν δύο βασικοί περιορισμοί λόγω της Φυσικής του Νεύτωνα:

- Η ταχύτητα διάδοσης v ενός κύματος ως προς κάποιον παρατηρητή δεν είναι δυνατό να μην εξαρτάται από την ταχύτητα του παρατηρητή μιας και η έννοια της ταχύτητας είναι έννοια σχετική. Άρα η ταχύτητα διάδοσης v του ήχου από παρατηρητή σε παρατηρητή είναι γενικώς διαφορετική.

- Το μήκος κύματος λ που μετράνε διάφοροι παρατηρητές σε ορισμένη περιοχή του χώρου είναι το ίδιο για όλους τους παρατηρητές

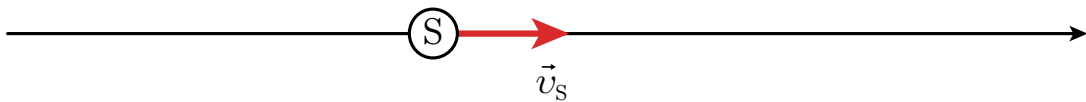
Συμπέρασμα:

Αφού το v είναι γενικά διαφορετικό και το λ ίδιο θα πρέπει η συχνότητα των κυμάτων που μετράνε οι διάφοροι παρατηρητές να είναι γενικώς διαφορετική!

Αν μας ρωτήσουνε λοιπόν γιατί ισχύει το φαινόμενο Doppler, μια γρήγορη και παράξενη συνάμα απάντηση θα μπορούσε να ήταν η εξής:

Ισχύει γιατί ενώ η ταχύτητα διάδοσης ενός ηχητικού κύματος διαφέρει από παρατηρητή σε παρατηρητή, το μήκος κύματός του σε κάποια ορισμένη περιοχή του χώρου είναι ίδιο για όλους τους παρατηρητές.

β) Όταν μια πηγή S ηχητικών κυμάτων συχνότητας f_s κινείται με ταχύτητα v_s πάνω σε ευθεία (Σχήμα 4)



Σχήμα 4

τότε ισχύει $|v_{nz} - v_s| = \lambda_s \cdot f_s \Rightarrow \lambda_s = \frac{|v_{nz} - v_s|}{f_s}$ (6)

«Μπροστά» από την πηγή οι ταχύτητες v_{nz} και v_s είναι ομόσημες, ενώ «πίσω από την πηγή ετερόσημες.

Άρα η τιμή της ποσότητας $|v_{nz} - v_s|$ «μπροστά» από την πηγή είναι

$$|v_{nz}| - |v_s| = |v_{nz}| - |v_s|$$

ενώ στην περιοχή «πίσω» από την πηγή η τιμή είναι μεγαλύτερη

$$|v_{nz}| + |v_s| = |v_{nz}| + |v_s|$$

Από την σχέση (6) προκύπτει ότι το μήκος κύματος λ_s που μετρά η πηγή και συνεπώς και κάθε άλλος νευτώνειος παρατηρητής είναι:

Πηγή ακίνητη:

Παντού $\lambda_s = \frac{|v_{nz} - v_s|}{f_s} = \frac{|v_{nz}|}{f_s} = |v_{nz}| \cdot T_s$

Πηγή κινούμενη με ταχύτητα v_s

«Μπροστά» από την πηγή $\lambda_s = \frac{|v_{nz} - v_s|}{f_s} = \frac{|v_{nz}| - |v_s|}{f_s} = |v_{nz}| \cdot T_s - |v_s| \cdot T_s$

«Πίσω» από την πηγή $\lambda_s = \frac{|v_{nz} - v_s|}{f_s} = \frac{|v_{nz}| + |v_s|}{f_s} = |v_{nz}| \cdot T_s + |v_s| \cdot T_s$

Συμπέρασμα:

Η ταχύτητα της πηγής επηρεάζει άμεσα το μετρούμενο μήκος κύματος. Μπροστά της το μικραίνει σε σχέση με αυτό που εκπέμπεται όταν είναι ακίνητη, ενώ πίσω της το μεγαλώνει.

γ) Η ταχύτητα της πηγής επηρεάζει το μετρούμενο μήκος κύματος, το μικραίνει ή το μεγαλώνει ανάλογα με την περιοχή στην οποία γίνεται η μέτρηση.

Όμως το μήκος κύματος σε κάθε περιοχή είναι ίδιο για όλους τους παρατηρητές. Επειδή στη $v = \lambda f$ το λ είναι ίδιο για όλους η διαφορετικότητα στη συχνότητα f και συνεπώς το φαινόμενο Doppler δεν οφείλεται στην κίνηση της πηγής, αλλά στην ταχύτητα v την οποία μετρά ως ταχύτητα διάδοσης του ήχου ο συγκεκριμένος παρατηρητής.

Τελικά το φαινόμενο Doppler οφείλεται στην ταχύτητα v_A του παρατηρητή (Α).

Αν μας ρωτήσουνε λοιπόν γιατί ισχύει το φαινόμενο Doppler, μια ακόμη πιο γρήγορη και συνάμα ακόμη πιο παράξενη απάντηση θα μπορούσε να ήταν η εξής:

Ισχύει γιατί οι παρατηρητές έχουν γενικά διαφορετικές ταχύτητες τόσο με την πηγή όσο και μεταξύ τους.....

.....

(Μπορείτε να δείτε επιπλέον παρατηρήσεις [εδώ](#))

Πήλιο, Παρασκευή 3 Ιουνίου 2016

Θρασύβουλος Μαχαίρας