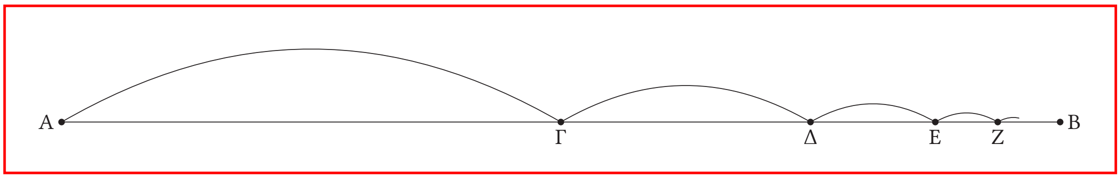
Δύο από τα παράδοξα του Ζήνωνα
και η υπέροχη κληρονομιά τους...

Α. Το παράδοξο της διχοτομίας

Για να πάμε από ένα σημείο Α σε ένα άλλο σημείο Β θα πρέπει αρχικά να διανύσουμε την μισή απόσταση μεταξύ των Α και Β, μετά την μισή από την απόσταση που μας απομένει, μετά την επόμενη μισή της μισής κ.λπ *(βλέπε Σχήμα 1)*



Σχήμα 1: *Το σημείο Γ είναι το μέσον του ΑΒ, το Δ είναι το μέσον του ΓΒ, το Ε είναι το μέσον του ΔΒ κ.ο.κ*

Συνεπώς πάντα θα έχουμε μπροστά μας ένα καινούριο μισό να διανύσουμε, έστω κι αυτά τα μισά θα γίνονται όλο και πιο μικρά.

Η παραπάνω διαδικασία είναι άπειρη και συνεπώς ποτέ δεν θα φτάσουμε στο Β.

Συμπέρασμα

Ξεκινώντας από τυχαίο σημείο Α δεν θα μπορέσουμε ποτέ να φτάσουμε σε οποιοδήποτε άλλο σημείο Β. Άρα δεν υπάρχει κίνηση και επομένως όσα βλέπουμε γύρω μας να κινούνται είναι δικές μας ψευδαισθήσεις.

Β. Η εμπειρία

Εμείς όμως από εμπειρία ξέρουμε ότι πάντα μπορούμε να φτάσουμε στο Β, παρόλο που η παραπάνω διαδικασία συμβαίνει όπως ακριβώς περιγράφηκε και συνεπώς είναι όντως μια άπειρη διαδικασία.

Γ. Μαθηματική λύση του παράδοξου

(...μετά από πολλά πολλά χρόνια, όταν προχώρησαν τα Μαθηματικά)

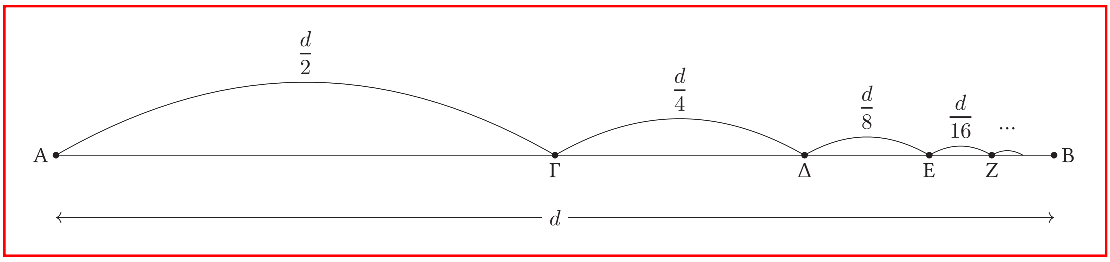
Ξεκινάμε από το σημείο Α. Φτάνοντας στο μέσο Γ θα έχουμε διανύσει την μισή απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β, δηλαδή $\frac{d}{2}$

Όταν φτάσουμε στο Δ, θα έχουμε διανύσει απόσταση $\frac{d}{2}+\frac{d}{4}$ *(βλέπε σχήμα 2)*

Όταν φτάσουμε στο σημείο Ε, που είναι το επόμενο μέσο, θα έχουμε διατρέξει απόσταση $\frac{d}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{8}$

Όταν φτάσουμε στο Ζ θα έχουμε διανύσει απόσταση $\frac{d}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{8}+\frac{d}{16}$

κ.ο.κ.



Σχήμα 2: *Οι διανυόμενες αποστάσεις συνεχώς μικραίνουν, αλλά είναι άπειρες και συνεχώς προστίθενται*

Άρα η συνολική απόσταση που θα διανύσουμε μέσω αυτής της διαδικασίας των άπειρων βημάτων είναι

$$\frac{d}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{8}+\frac{d}{16}+\frac{d}{32}+\frac{d}{64}+\frac{d}{128}+\frac{d}{256}+\ldots. \quad \text{(άπειροι προσθετέοι)}$$

Αποδεικνύεται (μαθηματικά) ότι το παραπάνω άθροισμα των άπειρων προσθετέων κάνει d, δηλαδή κάνει την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β.

Παρόλο λοιπόν που χρειάστηκε να διανύσουμε άπειρες αποστάσεις μικρότερης της απόστασης d μεταξύ των σημείων Α και Β, τελικά διανύσαμε την απόσταση d και φτάσαμε στο Β.

<u>Συμπέρασμα</u>

Όταν προσθέτεις άπειρο πλήθος αποστάσεων, οι οποίες γίνονται όλο και μικρότερες, μπορείς κάλλιστα να πάρεις μια πεπερασμένη απόσταση.

Ή αλλιώς μια πεπερασμένη απόσταση μπορεί κάλλιστα να είναι άθροισμα άπειρων μικρότερών της αποστάσεων. Να είναι δηλαδή πεπερασμένο αποτέλεσμα μιας διαδικασίας με άπειρα βήματα.

Δ. Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας

Η χελώνα προκαλεί τον Αχιλλέα σε διαγωνισμό ταχύτητας με τον όρο όταν γίνει η εκκίνηση η χελώνα να είναι ήδη 40 μέτρα μπροστά από τον Αχιλλέα.

Ο ημίθεος δέχεται και ο αγώνας ξεκινά.

Μετά από λίγο ο Αχιλλέας βρίσκεται στην θέση από την οποία ξεκίνησε η χελώνα, αλλά η χελώνα εν τω μεταξύ πρόλαβε και πήγε 1 μέτρο πιο πέρα.

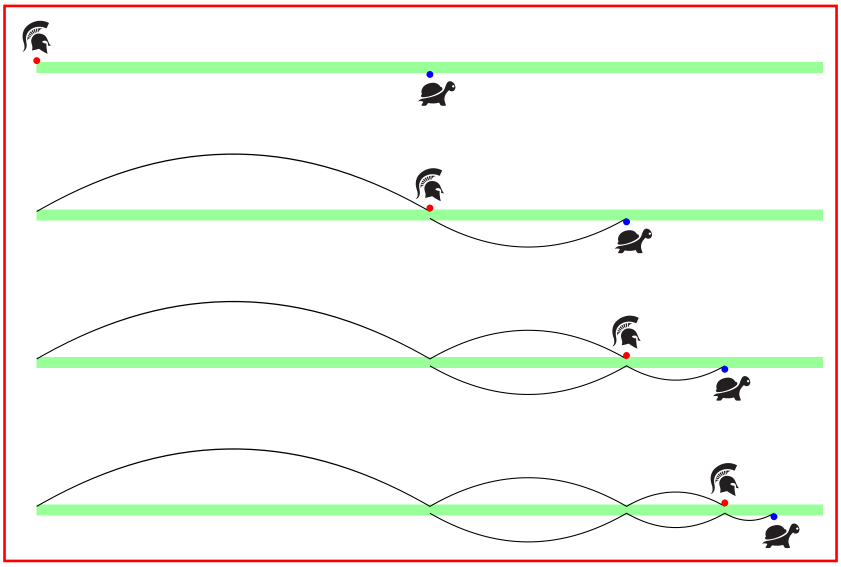
Για να καλύψει την απόσταση του 1 μέτρου που προχώρησε η χελώνα ο Αχιλλέας θα χρειαστεί κι άλλο χρόνο κατά τη διάρκεια του οποίου όμως η χελώνα θα έχει πάει λίγο πιο πέρα και άρα ο Αχιλλέας θα χρειαστεί κι άλλο χρόνο για να την φτάσει. Αλλά τότε η χελώνα θα έχει πάει λίγο πιο πέρα κ.ο.κ *(βλέπε Σχήμα 3)*

Η παραπάνω διαδικασία δεν θα τελειώσει ποτέ (είναι άπειρη) και άρα ο Αχιλλέας όχι μόνο δεν θα ξεπεράσει ποτέ την χελώνα στο τρέξιμο, αλλά θα χρειαστεί να προσθέσει άπειρα χρονικά διαστήματα για να την πλησιάσει.

Όταν όμως προσθέσουμε άπειρα χρονικά διαστήματα θα προκύψει ένα άπειρο χρονικό διάστημα και άρα ο Αχιλλέας χρειάζεται άπειρο χρόνο για να φτάσει στη χελώνα.

Συμπέρασμα

Άρα ο Αχιλλέας δεν φτάνει ποτέ την χελώνα και επομένως όσα βλέπουμε γύρω είναι δικές μας ψευδαισθήσεις.
Ο κόσμος μας είναι μια ψευδαίσθηση!!!!!



Σχήμα 3: *Ο Αχιλλέας όταν φθάνει στο σημείο που ήταν η χελώνα, αυτή έχει προχωρήσει λίγο ακόμη. Θα μπορέσει άραγε να προσπεράσει τη χελώνα;*

Ε. Η εμπειρία *(αν είχαμε εμπειρία από ημίθεους)*

Ο Αχιλλέας φτάνει και ξεπερνά την χελώνα, παρόλο που η παραπάνω διαδικασία συμβαίνει όπως ακριβώς περιγράφηκε και συνεπώς είναι όντως μια διαδικασία όπου προστίθενται άπειρα χρονικά διαστήματα.

ΣΤ. Μαθηματική λύση του παράδοξου

Η λύση αυτού του παράδοξου είναι τώρα λίγο πιο δύσκολη από την προηγούμενη, γιατί χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν κάποιες επιπλέον έννοιες. Αλλά σε ποιότητα και συμπεράσματα είναι ακριβώς ίδια με την προηγούμενη:
Όταν προσθέτω άπειρα χρονικά διαστήματα που όλο και μικραίνουν μπορώ κάλλιστα να πάρω ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.
Άρα ο Αχιλλέας θα φτάσει σύντομα (σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα) τη χελώνα και βέβαια θα την ξεπεράσει.

Γενικό μαθηματικό συμπέρασμα

Όταν προσθέσω άπειρους όρους (αποστάσεις, χρονικά διαστήματα, μάζες κ.λπ) δεν σημαίνει ότι θα φτάσω οπωσδήποτε σε αποτέλεσμα που θα είναι άπειρος αριθμός. Μπορεί να φτάσω και σε κάτι πεπερασμένο.
Το πότε φτάνουμε σε άπειρο και πότε σε πεπερασμένο αποτέλεσμα το ξέρουν πάρα πολύ καλά τα σημερινά Μαθηματικά

Ζ. Ένας παρασκηνιακός διάλογος

Δημοσιογράφος:
Η μαθηματική λύση των δύο παραπάνω παράδοξων του Ζήνωνα θεωρείται ικανοποιητική για τον Φυσικό του 21ου αιώνα;

Φυσικός:
Νομίζω όχι...

Δημοσιογράφος:
Υπάρχει μαθηματικό λάθος;

Φυσικός:
Όχι! Δεν υπάρχει λάθος στη λύση... Την ίδια εξάλλου κάνει και ο Φυσικός.
Και όλα τα συμπεράσματα και όλες οι προβλέψεις της λύσης συμφωνούν απόλυτα με όσα βλέπουμε και μετράμε γύρω μας, συμφωνούν δηλαδή και με την παρατήρηση και με το πείραμα.

Δημοσιογράφος:
Ε τότε αφού όλα συμφωνούν με την λύση που δόθηκε παραπάνω και τίποτε δεν την έχει διαψεύσει ποτέ και αφού τα μαθηματικά της είναι άψογα, τι πρόβλημα υπάρχει;

Φυσικός:
Υπάρχει πρόβλημα εννοιολογικό... Συνέπειας με τη Φύση... Η μαθηματική λύση δεν ησυχάζει τον Φυσικό...
Ας γίνω πιο σαφής:
Σύμφωνα με την (μαθηματική) λύση που δόθηκε παραπάνω το τμήμα ΑΒ *(βλέπε Σχ.1)* κόβεται στη μέση και μετά το μισό του κόβεται πάλι στη μέση και μετά το καινούριο μισό ξανά στη μέση και μετά ξανά και ξανά.
Η λύση δηλαδή που δόθηκε στο παράδοξο του Ζήνωνα θεωρεί ότι η διαδικασία αυτή των άπειρων διαδοχικών κοψιμάτων της απόστασης ΑΒ μπορεί να συνεχιστεί επ΄ άπειρον. Με άλλα λόγια θεωρεί ότι μπορείς να κόβεις το ΑΒ σε όσο μικρά κομματάκια θέλεις χωρίς σταματημό.

Δημοσιογράφος:
Και πού είναι το πρόβλημα; Παίρνουμε την απόσταση ΑΒ και την κόβουμε σε όλο και πιο μικρά κομμάτια.

Φυσικός:
Ναι αλλά η απόσταση ΑΒ είναι ουσιαστικά ο χώρος και συνεπώς αν πούμε ότι μπορούμε να κόψουμε την ΑΒ σε όσο μικρά κομματάκια θέλουμε είναι σα να θεωρούμε δεδομένο ότι και ο χώρος μπορεί να κοπεί σε όσο μικρά κομματάκια θέλουμε.
Αλλά αυτό δεν είναι δεδομένο!
Αν αύριο καταφέρει κάποιος ευφυέστατος άνθρωπος να συνδυάσει την Κβαντική Φυσική με την Γενική Σχετικότητα *(όπως όλοι το ευχόμαστε)* η βαρύτητα και άρα ο χώρος θα αποκτήσει αμέσως κβάντα *(σε παλιότερη ανάρτησή μου τα ονόμασα χωρόνια για ευκολία συζήτησης)*.
Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η Φύση θα έχει πιθανώς μέσα της ελάχιστη απόσταση την οποία θα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ να κόψουμε στη μέση.

Δημοσιογράφος:
Αυτό θα επηρεάσει την παραπάνω μαθηματική λύση;

Φυσικός:
Ούτε στο «τρισχιλιελάχιστο»...

Η λύση θα μείνει ακριβώς ίδια, γιατί αν υπάρχει αυτή η ελάχιστη απόσταση *(οπότε θα μας την επιβάλλει η Φύση)*, θα είναι αφάνταστα μικρή και άρα η συνέχεια (η δυνατότητα δηλαδή άπειρης διαιρετότητας) του <u>καθημερινού μας χώρου</u> δεν θα χαθεί.

Δεν θα χαθεί δηλαδή ούτε η μαθηματική μας δυνατότητα να αδιαφορούμε για το γεγονός ότι υπάρχει ελάχιστη απόσταση, ούτε η φυσική μας επιλογή να πλησιάζουμε όσο θέλουμε τα συνηθισμένα πράγματα.

Τα κβάντα του χώρου (η ελάχιστη απόσταση που λέγαμε) ανήκουν σε άλλο επίπεδο συνθηκών και αντιμετώπισης το οποίο βρίσκεται πάρα παρα πάρα πολύ μακριά όχι απλά από τη δικιά μας καθημερινότητα, αλλά και από την καθημερινότητα του ατόμου.

<u>*Δημοσιογράφος:*</u>

Άρα τι πρόβλημα υπάρχει στη λύση του παράδοξου του Ζήνωνα;

<u>*Φυσικός:*</u>

Άλλο να λες ότι κόβω ένα κομμάτι σίδηρο στη μέση και βγαίνουν δυο μισά σιδήρου και μετά ξανά στη μέση και βγαίνει κάτι μικρότερο και ξανά και ξανά και να λες ότι αυτό το επαναλαμβάνω επ άπειρον και άλλο να ξέρεις ότι υπάρχουν τα άτομα του σιδήρου που όταν φτάσεις σε αυτά θα σταματήσουν την αισιοδοξία σου να επαναλάβεις το κόψιμο του σιδήρου άπειρες φορές.

Άλλο να λες ότι επειδή τα άτομα του σιδήρου είναι πολύ μικρά μπορώ να τα αγνοήσω σε αυτή και αυτή την προσέγγιση που κάνω, γνωρίζοντας όμως και το ότι υπάρχουν και το πώς λειτουργεί η Φύση και σε τι προσέγγιση και συνθήκες την μελετάω και άλλο να μην ξέρεις ότι υπάρχουν άτομα.

Δεν είναι μαθηματικό το πρόβλημα αλλά ουσίας γνώσης...

<u>*Δημοσιογράφος:*</u>

Ας υποθέσουμε ότι όσα ελπίζεις να ανακαλυφθούν στο μέλλον για τον χώρο (για την βαρύτητα) ίσχυαν από τώρα που μιλάμε. Πώς θα αντιμετώπιζες το παράδοξο του Ζήνωνα;

<u>*Φυσικός:*</u>

Μαθηματικά όπως και παραπάνω. Αλλά θα <u>ξέρω</u> ότι ναι μεν μπορώ να κόβω και να ξανακόβω την απόσταση ΑΒ σε όλο και πιο μικρά κομμάτια *(όπως κάνουν τα μαθηματικά)*, αλλά στο τέλος, <u>μετά από πεπερασμένα και όχι άπειρα κοψίματα,</u> θα φτάσω στην «άκρη» από το πιο μικρό κομμάτι του χώρου και μετά «τσουπ» ο χώρος με πάει κατευθείαν στο τέρμα στο Β, χωρίς να διαπραγματευθεί μαζί μου κανένα επιπλέον κόψιμο. Θα με πάει είτε το θέλω είτε όχι!!!

<u>*Δημοσιογράφος:*</u>

Άρα αυτό που σε κάνει σκεφτικό δεν είναι η ορθότητα ή όχι των μαθηματικών, αλλά η ανάγκη της γνώσης, την οποία σήμερα δεν κατέχεις, ώστε να ξέρεις τι λες όταν λες κόβω και ξανακόβω την απόσταση ΑΒ.

<u>*Φυσικός:*</u>

Ακριβώς. Η ουσία όσων είπα δεν είναι στην αμφισβήτηση της παραπάνω λύσης του παραδόξου του Ζήνωνα, αλλά στο ότι δεν ξέρουμε αν μπορούμε να κόβουμε τον χώρο σε όσο μικρά κομμάτια θέλουμε.

Δεν ξέρουμε δηλαδή αν ο χώρος είναι συνεχής ή κοκκώδης.

Επιπλέον δεν ξέρουμε αν τελικά η Φύση έχει μέσα της τέτοιου είδους διαδικασίες άπειρων βημάτων.

Το να κόβεις και να κόβεις και να ξανακόβεις συνέχεια ένα πράγμα, όπως έκαναν τα Μαθηματικά επιλύοντας τα παραπάνω παράδοξα, είναι σα να θεωρείς δεδομένο ότι αυτό που κόβεις είναι κάτι συνεχές και άρα ότι μπορείς να το κόβεις επ άπειρον.

Αυτό για τον Μαθηματικό δεν αποτελεί πρόβλημα, αλλά για τον Φυσικό απαιτεί προσοχή σε όσα πει και σε όσα φαντάζεται. Αν δεν προσέξει ίσως πέσει σε αντιφάσεις...

Δημοσιογράφος:

Δώσε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα

Φυσικός:

Ας πούμε ότι παίρνω ένα σχοινί και το κόβω στη μέση. Βγαίνουν δύο μικρότερα σχοινιά. Παίρνω το ένα μισό και το κόβω στη μέση και μετά αυτό που προκύπτει ξανά στη μέση κ.ο.κ.

Αν το σχοινί ήταν όπως το θέλουν τα Μαθηματικά, αν δηλαδή ήταν ένα συνεχές *(αν δηλαδή δεν είχε μέσα του «πραγματάκια» όπως τα ηλεκτρόνια, άτομα πρωτόνια κ.λπ τα οποία να μην κόβονται άλλο οπότε να με σταματήσουν στο κόψιμο)*, τότε θα μπορούσα να το κόβω επ άπειρον και να φτάσω σε ένα σχοινάκι με ...μηδέν μήκος! Σε μηδέν σχοινί, ας το πούμε!

Αν συμβεί αυτό όμως θα ψάχνομαι ως Φυσικός με ποιον τρόπο θα μπορέσω να ξαναφτιάξω το σχοινί από τα «καταληκτικά» του μηδενικά κομματάκια;

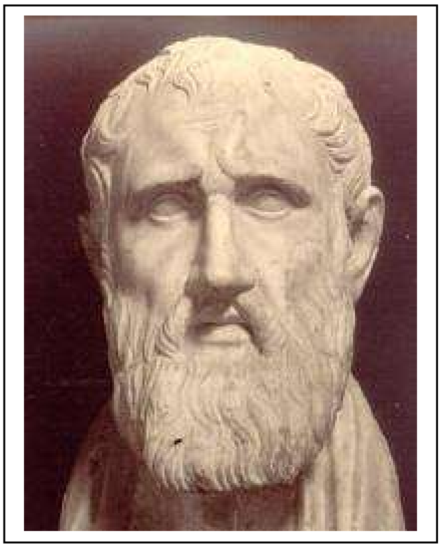
Πώς με μια αντίστροφη διαδικασία και ενώνοντας κομματάκια μηδενικού σχοινιού θα ξαναφτιάξω το σχοινί; Μπορώ να μαζεύω μηδενικά με μηδενικά και μηδενικά και να βγει το σχοινί;

Πρέπει ως Φυσικός να ξέρω μέχρι που φτάνει η διαιρετότητα μου, ώστε να ξέρω και την Φύση και το όριο με το οποίο την προσεγγίζω.

Κυρίως όμως πρέπει να ξέρω (να μάθω εν προκειμένω) τα όρια με τα οποία Αυτή δομείται.

Δημοσιογράφος:

Δηλαδή το πρόβλημα δεν βρίσκεται στα Μαθηματικά, αφού έτσι κι αλλιώς το όριο ή μη της διαιρετότητας του χώρου δεν θα επηρεάσει τη λύση των παραδόξων του Ζήνωνα, αλλά στην ψυχή του Φυσικού που λαχταρά να ξέρει τι κάνει και γιατί το κάνει κι αν η Φύση του επιτρέπει να το κάνει και μέχρι πιο όριο του το επιτρέπει. Και ποια είναι τα όρια που δομούν την ίδια τη Φύση. Όπως π.χ. ένα καθοριστικό δομικό όριο της Φύσης είναι η αξεπέραστη ταχύτητα του φωτός.



Φυσικός:

Ακριβώς! Θέλω να ξέρω! Να ξέρω τι κάνω κι αν η Φύση έχει, πού και με ποιον τρόπο μέσα της το άπειρο. Είναι άπειρο το Σύμπαν; Μπορώ να έχω άπειρο χρόνο; Μπορώ να κόψω τον χώρο σε απείρως μικρά κομμάτια; Υπάρχουν απείρως μεγάλα πράγματα ή απείρως μικρά; Ποιο είναι το πιο μικρό κομμάτι μιας επιφάνειας;

Η. Προβληματισμοί

i) Ο Ζήνων (από όσα ξέρω) πρέπει να ήταν ο πρώτος Άνθρωπος που συγκρούσθηκε σφοδρά με το άπειρο και την λογική του. Έτσι, για πρώτη φορά, η λογική μας οδηγείται σε μια φοβερή αναμέτρηση με τους παραλογισμούς και τα αδιέξοδα του απείρου και μάλιστα σε μια εποχή που η ικανότητα των ανθρώπων να μετράνε με αριθμούς έφτανε μέχρι τις μερικές χιλιάδες.

ii) Με τα παράδοξα του Ζήνωνα, για πρώτη φορά και με σοβαρό επιστημονικό επιχείρημα γίνεται συνείδησή μας ότι το άπειρο δεν είναι πια συνώνυμο του πολύ ή του πάρα πολύ μεγάλου.

Το άπειρο ξεπροβάλλει ως πιο μεγάλο από όλους τους αριθμούς, έστω κι αν αυτοί δεν τελειώνουν ποτέ. Πώς κάτι είναι πιο μεγάλο από όλους τους αριθμούς που μπορούν να είναι όσο θέλουν μεγάλοι;

Έμμεσα λοιπόν ο Ζήνων προειδοποιεί τους αρχαίους (και όχι μόνο) για το άπειρο και τους πιθανούς κινδύνους που θα συναντήσουν αν το εισάγουν σε κάποιο μετρικό σύστημα, μιας και συνοδεύεται από αδιέξοδα και παράλογα.

iii) Στο παράδοξο του Αχιλλέα με την χελώνα η χρονική διάρκεια που έχει να αντιμετωπίσει ο ημίθεος καθώς πλησιάζει την χελώνα μικραίνει ασταμάτητα. Μπορεί να φτάσει στο μηδέν ή όχι; Ο χρόνος είναι κάτι συνεχές που απλά ρέει και άρα «κόβεται» σε όσο μικρά κομμάτια θέλουμε ή υπάρχει όριο στο κόψιμο του χρόνου; Κι αν δεν έχει όριο, αλλά ξαφνικά χάνεται ως έννοια ποια ποιότητα θα αποκτήσουν οι υπολογισμοί μας;

iv) Πιο γενικά το παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα έθεσε ένα ακόμη πρόβλημα, το οποίο συνειδητοποιήσαμε μόλις τελευταία:

Αφού μπορούμε να κόψουμε ένα χρονικό διάστημα σε άπειρα μικρότερα χρονικά διαστήματα, κατά την διάρκεια των οποίων ο Αχιλλέας κάνει μια συγκεκριμένη ενέργεια *(ξανατρέχει προς το επόμενο σημείο στο οποίο μετατοπίστηκε η χελώνα)*, μήπως θα μπορούσαμε να φτιάξουμε μια μηχανή που θα μπορούσε να κάνει άπειρες ενέργειες σε μια ώρα ας πούμε;

Ή αλλιώς:

Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε τις άπειρες υποδιαιρέσεις μιας πεπερασμένης χρονικής περιόδου σε μια ακολουθία διακριτών ενεργειών μιας μηχανής ας πούμε ή ενός υπεράνθρωπου;

v) Τελικά η Φύση έχει μέσα της το άπειρο ή όχι και με ποια μορφή; Το μαθηματικό π ή το $\sqrt{2}$, που το καθένα έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, με ποια μορφή δομούν την Φύση;

Κι αν η Φύση μας αποκαλύψει ότι τελικά έχει μόνο όρια και άρα μας δείξει ότι λατρεύει το πεπερασμένο;

.....

....

Ας είσαι ... καλά Ζήνωνα, εφευρέτη της διαλεκτικής μεθόδου όπως σε αποκαλούσε ο Αριστοτέλης.

Σου ήρθε ξαφνικά να υποστηρίξεις τον Δάσκαλό σου τον Παρμενίδη και από τότε και για χιλιάδες χρόνια έβαλες σε πολλές σκέψεις κόσμο και κοσμάκη...

Παρασκευή 13 Νοεμβρίου 2020

Θρασύβουλος Μαχαίρας
Φυσικός