

## Ερωτήσεις για την απλή αρμονική ταλάντωση ...

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να εξεταστεί η ορθότητα του ορισμού της απλής αρμονικής ταλάντωσης (α.α.τ) μέσω της εξίσωσης κίνησης (κινηματικός ορισμός).

Με άλλα λόγια αν δοθεί ως εξίσωση κίνησης ενός υλικού σημείου η  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  και αδιαφορήσουμε για τις δυνάμεις που δρουν στο υλικό σημείο, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την κίνησή του ως α.α.τ;

*(Οι κινήσεις στις οποίες αναφερόμαστε είναι ευθύγραμμες, λόγω του σχολικού βιβλίου, χωρίς όμως αυτό να μειώνει στο ελάχιστο τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε)*

### 1ο ερώτημα

Ο ορισμός

«Ένα σώμα κινείται παλινδρομικά γύρω από ένα σημείο  $O$  και η εξίσωση της απομάκρυνσης από το σημείο  $O$  δίνεται από τη σχέση  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$ . Η κίνηση του σώματος ονομάζεται απλή αρμονική ταλάντωση»

είναι λανθασμένος ή όχι;

### Απάντηση

Είναι λανθασμένος γιατί υπάρχουν κι άλλες κινήσεις που έχουν ως εξίσωση κίνησης την  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  και οι οποίες δεν είναι απλές αρμονικές ταλαντώσεις.

Μπορούμε να αναφέρουμε μερικές που συναντάμε στο βιβλίο Φυσικής Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου:

- Ο εξαναγκασμένος αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση στη μόνιμη κατάσταση και ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες που του επιβλήθηκαν.
- Ο εξαναγκασμένος αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση ευθύς εξαρχής (δηλαδή χωρίς να περιμένουμε το καταληκτικό στάδιο) μόλις του επιβληθούν κατάλληλες αρχικές συνθήκες (δηλαδή κατάλληλη αρχική θέση και κατάλληλη αρχική ταχύτητα).
- Ο εξαναγκασμένος αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση όταν του επιβληθούν κατάλληλες αρχικές συνθήκες
- Οι ταλαντώσεις των σημείων μιας χορδής στην οποία διαδίδεται μονοχρωματικό κύμα  $y = A\eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

κ.λπ

Οι κινήσεις αυτές έχουν εξίσωση κίνησης της μορφής  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$ .

Επομένως ο παραπάνω ορισμός είναι πέρα από κάθε αμφιβολία λανθασμένος και συνεπώς λανθασμένος είναι ο ορισμός της απλής αρμονικής ταλάντωσης και στο βιβλίο Φυσικής της Β' Λυκείου και στο βιβλίο Φυσικής της Γ' Λυκείου.

Μιλώντας για ευθύγραμμες κινήσεις ο ορισμός της α.α.τ. πρέπει να είναι δυναμικός, να κάνει δηλαδή αναφορά στις δυνάμεις που ελέγχουν την κίνηση:

*«Απλή αρμονική ταλάντωση είναι η κίνηση υλικού σημείου υπό την επίδραση χωροεξαρτώμενης (ή αλλιώς χρονοανεξάρτητης) δύναμης της μορφής  $F = -Dx$ .*

## 2ο ερώτημα

Ένα σώμα, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, εκτελεί (ευθύγραμμη) ταλάντωση με εξίσωση κίνησης

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Μπορούμε με ένα απλό «πείραμα» να ξεχωρίσουμε την ποιότητα της δύναμης που δέχεται το υλικό σημείο, αν δηλαδή η δύναμη είναι **χωροεξαρτώμενη** ή **χρονοεξαρτώμενη**;

### Απάντηση

Υπάρχει κεφαλαιώδης διαφορά ανάμεσα σε μια χωροεξαρτώμενη και σε μια χρονοεξαρτώμενη δύναμη,

- **έστω κι αν** και οι δύο μορφές (ποιότητες) δύναμης μπορούν μαθηματικά (**όχι φυσικά**) να εκφραστούν με την ίδια χρονική συνάρτηση,
- **έστω κι αν** και οι δύο μορφές (ποιότητες) δύναμης μπορούν να επιβάλλουν τελικά την ίδια ακριβώς εξίσωση κίνησης.

Ας δούμε τα πράγματα πιο αναλυτικά:

Παρακολουθούμε δύο πανομοιότυπα σώματα μάζας  $m = 0,02\text{Kg}$  (δηλαδή δύο υλικά σημεία ίδιας μάζας  $m$ ) να εκτελούν ταλάντωση, το καθένα γύρω από το μηδέν του άξονά του  $x$ .

Έστω ότι

- το κάθε σώμα δέχεται μόνο μία δύναμη
- του ενός η δύναμη είναι χωροεξαρτώμενη, ενώ του άλλου χρονοεξαρτώμενη
- η κίνησή τους περιγράφεται από την ίδια ακριβώς εξίσωση

$$x = 3\eta\mu 7t \quad t \geq 0 \quad (S.I) \quad (1)$$

Με παραγωγίσεις της σχέσης (1) βρίσκουμε ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση και των δύο υλικών σημείων είναι αντίστοιχα

$$v = 21\sigma\nu\nu 7t \quad \text{και} \quad a = -147\eta\mu 7t \quad (S.I) \quad (2)$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι η δύναμη που δρα στο κάθε υλικό σημείο έχει ως αναλυτική έκφραση συναρτήσει του χρόνου την

$$F = -2,94\eta\mu 7t \quad (S.I) \quad (3)$$

Άρα και τα δύο υλικά σημεία, **την ίδια χρονική στιγμή  $t$**

- βρίσκονται στην ίδια θέση  $x = 3\eta\mu 7t$
- έχουν την ίδια ταχύτητα  $v = 21\sigma\nu\nu 7t$
- έχουν την ίδια επιτάχυνση  $a = -147\eta\mu 7t$
- δέχονται την ίδια δύναμη  $F = -2,94\eta\mu 7t \quad (S.I)$

Με λίγα λόγια τα δύο υλικά σημεία έχουν τα ίδια ακριβώς κινηματικά χαρακτηριστικά.

**Για να βρω αν η δύναμη  $F = -2,94\eta\mu 7t$  είναι χωρο- ή χρόνο- εξαρτώμενη, θα εκμεταλλευτώ το γεγονός ότι ενώ μπορώ να «σταματήσω» το χώρο, δεν μπορώ να σταματήσω το χρόνο.**

Άρα για να καταφέρω να ξεχωρίσω την ποιότητα της δύναμης, αρκεί να αφήσω να κυλήσει ΜΟΝΟ ο χρόνος, χωρίς να αλλάξει ο χώρος.

Καθώς λοιπόν τα υλικά σημεία  $m$  ταλαντώνονται πανομοιότυπα γύρω από το  $x=0$  με εξίσωση  $x = 3\eta\mu 7t$ , βάζω στο μάτι το ένα από τα δυο και όταν είναι σε θέση πλάτους, π.χ. στη θέση  $x=3m$  και έχει σταματήσει στιγμιαία για να γυρίσει πίσω, το «αρπάζω» και το ακινητοποιώ για χρονικό διάστημα  $\Delta t_0$ .

- **Αν η δύναμη  $F = -2,94\eta\mu 7t$  είναι χωρο-εξαρτημένη** (δεν εξαρτάται δηλαδή από το χρόνο), τότε κατά το χρονικό διάστημα  $\Delta t_0$  που έχω ακινητοποιήσει το σώμα η δύναμη, η θέση και η ταχύτητά του δεν αλλάζουν και μάλιστα είναι ακριβώς ίδιες με εκείνες που είχε το υλικό σημείο τη στιγμή που το σταμάτησα.

Άρα όταν το ξαναφήσω ελεύθερο αρχίζουν όλα να «κυλάνε» από κει που τα σταμάτησα, σα να μην είχε συμβεί τίποτε. Η κίνηση λοιπόν θα είναι πανομοιότυπη όπως και πριν, με μόνη διαφορά μια χρονική καθυστέρηση.

Κάποιος δηλαδή που περιμένει το σώμα να περάσει από συγκεκριμένο σημείο, θα το δει να περνά με χρονική καθυστέρηση  $\Delta t_0$ , έχοντας όμως όλα τα χαρακτηριστικά της κίνησης (ταχύτητα, επιτάχυνση, ενέργειες, ορμές κ.λ.π.) ακριβώς όπως τα ανέμενε να είναι στη θέση αυτή στην οποία περιμένει.

Πράγματι, μαθηματική επεξεργασία δείχνει ότι αν τη χρονική στιγμή  $t'$  ακινητοποιήσω το υλικό σημείο στη θέση πλάτους  $x=3m$  για χρονικό διάστημα  $\Delta t_0$  και το ξαναφήσω ελεύθερο, τότε η εξίσωση κίνησής του θα είναι

$$x = 3\eta\mu \left[ 7(t - t' - \Delta t_0) + \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{με} \quad t \geq t' + \Delta t_0 \quad (4)$$

όπου  $t' = kT + \frac{T}{4}$   $k=0,1,2,\dots$  η χρονική στιγμή που «άρπαξα» το σώμα στη θέση  $x=3m$

Δηλαδή η εξίσωση κίνησης είναι ίδια με πριν, αλλά με χρονική καθυστέρηση  $\Delta t_0$

- **Αν η δύναμη  $F = -2,94\eta\mu 7t$  είναι χρόνο-εξαρτημένη**, τότε κατά το χρονικό διάστημα  $\Delta t_0$  που έχω ακινητοποιήσει το σώμα, η θέση και η ταχύτητά του δεν αλλάζουν και μάλιστα είναι ακριβώς ίδιες με εκείνες που είχε το υλικό σημείο τη στιγμή που το σταμάτησα.

Όμως η δύναμη  $F = -2,94\eta\mu 7t$  που δέχεται το σώμα αλλάζει γιατί είναι χρονοεξαρτώμενη και ο χρόνος «κυλάει».

Άρα όταν ξαναφήσω ελεύθερο το υλικό σημείο, η κίνησή του δεν θα είναι πια ίδια με πριν.

Πρέπει το υλικό σημείο να είναι «πολύ τυχερό» για να ξανακάνει ό,τι έκανε, να ταλαντώνεται δηλαδή γύρω από το  $x=0$  και να περνά από κάποιο συγκεκριμένο σημείο με μόνο μια χρονική καθυστέρηση, αλλά με τα ίδια κινητικά χαρακτηριστικά όπως και πριν.

Το πιο πιθανό είναι το υλικό σημείο να μη ξαναγυρίσει ποτέ στη περιοχή που ταλαντωνόταν και μάλιστα να το δούμε να απομακρύνεται από το  $x=0$  χωρίς σταματημό.

Πράγματι μαθηματική επεξεργασία δείχνει ότι αν τη χρονική στιγμή  $t'$  ακινητοποιήσω το υλικό σημείο στη θέση πλάτους  $x=3m$  για χρονικό διάστημα  $\Delta t_0$  και το ξανα αφήσω ελεύθερο τότε η εξίσωση κίνησής του θα είναι

$$x = 3\eta\mu 7t + t \cdot 21 \cdot \eta\mu(7 \cdot \Delta t_0) + 3[1 - \sigma\upsilon\nu(7 \cdot \Delta t_0)] - 21 \cdot (t' + \Delta t_0) \cdot \eta\mu(7 \cdot \Delta t_0)$$

με  $t \geq t' + \Delta t_0$  (5)

όπου  $t' = kT + \frac{T}{4}$   $k=0,1,2,\dots$  η χρονική στιγμή που σταμάτησα το σώμα στη θέση  $x=3m$

**Όσο λοιπόν έχουμε μερικές μόνο κινηματικές απαιτήσεις** (π.χ. υπολογισμό θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης, δύναμης, ορμής υλικού σημείου) χωρίς να επιδιώκουμε

- να «προφητεύσουμε» τι θα συμβεί στο σώμα αν του τύχει το ένα ή το άλλο γεγονός (αν δηλαδή συμμετάσχει σε κάποιο μελλοντικό φαινόμενο)
- να υπολογίσουμε ενέργειες (κινητική, δυναμική, ολική) ή έργα

τότε δεν χρειαζόμαστε τίποτε άλλο παρά μόνο την εξίσωση κίνησης.

Στην περίπτωση αυτή των λίγων απαιτήσεων μπορούμε να πούμε ότι το σώμα με εξίσωση κίνησης π.χ. την  $x = 3\eta\mu 7t$  ή πιο γενικά την  $x = A\eta\mu(\omega t + \phi)$  εκτελεί «αρμονική ταλάντωση». Σκέτο «αρμονική ταλάντωση». **Όχι όμως απλή αρμονική ταλάντωση!!!**

Ο όρος «αρμονική ταλάντωση» είναι γενικός χωρίς να αποκαλύπτει τις ιδιαιτερότητες της κίνησης και χωρίς να είναι ικανός να μας πει αν διατηρείται ή όχι η ενέργεια, αν υπάρχει ή όχι δυναμική ενέργεια, τι θα συμβεί αν κατά τη διάρκεια της κίνησης συμβεί κάποιο φαινόμενο (κρούση, ακινησία κ.λπ)

Ο όρος «απλή αρμονική ταλάντωση» είναι ειδικός μιας και επιβάλλει ειδικές καταστάσεις, όπως για παράδειγμα τη διατήρηση της ενέργειας, την παρουσία ελκτικού κέντρου από το οποίο δεν μπορεί να ξεφύγει το σώμα κ.λπ.

.....

.....

Με το παραπάνω απλό «πείραμα» όχι μόνο ελέγξαμε αν η δύναμη πάνω στο υλικό σημείο ήταν χώρο- ή χρονοεξαρτώμενη, αλλά είδαμε πόσο κεφαλαιώδες είναι να είμαστε προσεκτικοί όταν χειριζόμαστε ορισμούς.

**Δεν είναι σχολαστικισμός να σεβόμαστε τους ορισμούς, αλλά ουσία...**

**Άλλο «χωροεξαρτώμενη δύναμη» και άλλο «χρονοεξαρτώμενη». Άλλο «αρμονική ταλάντωση» και άλλο «απλή αρμονική ταλάντωση».**

Η σαφήνεια ενός ορισμού μας καθιστά ικανούς να ξέρουμε τι μας λένε κάποιοι άλλοι που μας μιλάνε, να ξέρουμε τι μας ζητάνε να κάνουμε, να ξέρουμε ποια σημαντική λεπτομέρεια μας δώσανε να αξιοποιήσουμε κ.λπ.

Και όλα αυτά είναι απαραίτητα, για να μην έρθει η τραγική εκείνη στιγμή να συλλάβουμε τον εαυτό μας ως ασκησιοκατασκευαστή σε νεοεφευρεθέντα φαινόμενα.....

Η Φυσική έχει και ορισμούς και μαθηματική αυστηρότητα και αυτό δεν είναι διαπραγματεύσιμο. Μας χρειάζονται και τα δύο για να μιλάμε, να σκεφτόμαστε, να επεξεργαζόμαστε πληροφορίες.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δεν «φτιάχτηκε» για να βρίσκει το πλήθος των δυνάμεων που δρουν στο υλικό σημείο, ούτε τις ιδιαιτερότητες και τα χαρακτηριστικά των συνιστωσών ή της συνισταμένης.

Σίγουρα «προφητεύει» περισσότερα όταν ξέρουμε τις συνιστώσες δυνάμεις και δη την ποιότητά τους. Στην περίπτωση όμως που αγνοούμε τις συνιστώσες το μόνο που μπορεί να κάνει ο νόμος του Νεύτωνα είναι να μας δώσει την αναλυτική έκφραση της συνισταμένης συναρτήσεως του χρόνου, αν μας δοθεί η εξίσωση κίνησης.

### 3ο ερώτημα

Όπως είπαμε στα παραπάνω, δεν είναι δυνατόν να γίνει ολοκληρωμένη εξέταση μιας κίνησης με κινηματικό τρόπο όπως κάνει το σχολικό βιβλίο. Δεν μπορεί δηλαδή να γίνει πλήρης κάλυψη μιας κίνησης, έχοντας ως **αποκλειστική** πληροφορία την εξίσωση κίνησης. Χρειαζόμαστε τις δυνάμεις και μάλιστα την ποιότητά τους. Μπορείτε να γίνετε πιο κατανοητός και με άλλο παράδειγμα;

#### Απάντηση

Κινηματική προσέγγιση μιας κίνησης, κάλυψη δηλαδή μιας κίνησης σε όλη της την έκταση ξεκινώντας από μόνη την εξίσωση κίνησης και χωρίς καμιά άλλη πληροφορία, δε γίνεται. Το είδαμε με το «πείραμα» στο 2ο ερώτημα

Ας το δούμε όμως και με άλλον τρόπο:

Υλικό σημείο μάζας  $m$  εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση κίνησης  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$ . Παραγωγίζουμε και βγάζουμε την ταχύτητα. Δεύτερη παραγωγή μας δίνει την επιτάχυνση. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και την ορμή και την κινητική ενέργεια.

Όμως εδώ τελειώνει η βεβαιότητα.

Για όλα σχεδόν τα υπόλοιπα στοιχεία που αφορούν την κίνηση δεν θα μπορούμε να μιλήσουμε με βεβαιότητα.

Ο λόγος είναι ότι ο νόμος του Νεύτωνα δεν λειτουργεί και αντίστροφα:

- Αν ξέρεις τις δυνάμεις βρίσκεις «άνετα» (αν καταφέρεις και λύσεις τη διαφορική εξίσωση) την επιτάχυνση κ.λπ
- Αν όμως ξέρεις την επιτάχυνση δε βρίσκεις τις (συνιστώσες) δυνάμεις που δρουν σε ένα σώμα, παρά μόνο μια αναλυτική έκφραση συναρτήσεως του χρόνου για τη συνισταμένη δύναμη. Τίποτε άλλο!!!

Ας εξηγήσουμε:

Αφού με δύο παραγωγίσεις της εξίσωσης κίνησης  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  φτάσουμε στην επιτάχυνση  $a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$ , πολλαπλασιάζουμε επί τη μάζα και βρίσκουμε ως συνισταμένη δύναμη την  $F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$ .

Πετυχαίνουμε έτσι μια αναλυτική έκφραση για τη συνισταμένη δύναμη, αλλά δεν έχουμε τα ακριβή της στοιχεία. Δεν ξέρουμε δηλαδή αν η συνισταμένη αυτή δύναμη είναι χρονο- ή

χωροεξαρτώμενη, αν έχει προκύψει από άθροισμα άλλων δυνάμεων ή όχι, ποιας μορφής συνιστώσες έχει κ.λ.π.

Κι αυτό έχει επιπτώσεις, γιατί αν δεν έχουμε αυτές τις επιπλέον πληροφορίες, τις οποίες ας σημειωθεί δε μπορεί να μας δώσει ο νόμος του Νεύτωνα, δε μπορούμε να κάνουμε κάποιους υπολογισμούς.

Μπορεί δηλαδή να ξέρουμε ότι η συνισταμένη δύναμη είναι  $F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$ , αλλά αλλάζοντας κάθε φορά τις πληροφορίες για την ποιότητα και το πλήθος των συνιστωσών δυνάμεων, οδηγούμαστε σε άλλα συμπεράσματα και κατά συνέπεια σε άλλα αποτελέσματα και σε άλλες «προφητεύσεις».

Για παράδειγμα:

**α)** Αν μαζί με την εξίσωση κίνησης  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  μας δώσουν ως πληροφορία ότι η συνισταμένη δύναμη  $F$  προήλθε από μια μόνο συνιστώσα που είναι χρονοεξαρτώμενη. Τότε συμπεραίνουμε ότι στο σώμα δρα μόνο μια δύναμη, η  $F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  που είναι χρονοεξαρτώμενη και κατά συνέπεια συμπεραίνουμε ότι

- το σώμα ανά πάσα στιγμή έχει μόνο κινητική ενέργεια
- το σώμα δεν έχει δυναμική ενέργεια
- η (ολική) ενέργειά του σώματος είναι μεταβαλλόμενη και ισούται με την κινητική
- δεν υπάρχει ελκτικό κέντρο στην κίνηση και άρα αν συμβεί κάτι (κρούση, περιορισμένη ακινησία κ.λπ) το σώμα θα φύγει για πάντα από «κοντά μας»
- οι αρχικές συνθήκες ήταν ειδικά επιλεγμένες ώστε το κινητό να εκτελεί τη φραγμένη κίνηση  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  (την αρμονική δηλαδή ταλάντωση που παρακολουθούμε, προσέξτε όχι απλή αρμονική ταλάντωση)
- το κινητό στο πλάτος του δε θα έχει ενέργεια μιας και η κινητική του ενέργεια θα είναι μηδέν
- δε μπορώ να χρησιμοποιήσω φορμαλισμό, σχέσεις και έννοιες που αφορούν την α.α.τ. (π.χ. σταθερά επαναφοράς) κ.λ.π.

**β)** Αν μαζί με την εξίσωση κίνησης  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  μας δώσουν ως πληροφορία ότι η παραπάνω συνισταμένη δύναμη  $F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  προήλθε από μια μόνο συνιστώσα που είναι χωροεξαρτώμενη, τότε αντικαθιστούμε στη σχέση  $F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  την ποσότητα  $A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  με την απομάκρυνση  $x$  και συμπεραίνουμε ότι στο κινητό δρα μόνο μια δύναμη, η  $F = -m\omega^2 x$  δηλαδή η  $F = -Dx$  που είναι χωροεξαρτώμενη και συνεπώς είναι συντηρητική, είναι **δύναμη επαναφοράς**.

Άρα αβίαστα συμπεραίνουμε ότι το σώμα εκτελεί **απλή αρμονική ταλάντωση** και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλο το φορμαλισμό, τις σχέσεις και τις έννοιες που αφορούν την α.α.τ.

Ξέρουμε τώρα ότι

- το σώμα έχει και δυναμική και κινητική ενέργεια
- η (ολική) ενέργειά του είναι σταθερή και ισούται με το άθροισμα δυναμικής και κινητικής

- υπάρχει ελκτικό κέντρο και είναι το μηδέν. Άρα αν συμβεί κάτι στο σώμα, ακόμη και στο άπειρο να το πάμε, αυτό θα ξαναγυρίσει και θα ταλαντώνεται γύρω από το ελκτικό του κέντρο
- η κίνησή του είναι πάντα φραγμένη με οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες
- ό,τι και να συμβεί στο σώμα θα υπάρχει πάντα πλάτος και ότι στο πλάτος του το σώμα έχει όλη την ενέργειά του αποκλειστικά δυναμική και μάλιστα όση ακριβώς έχει και σε κάθε σημείο της τροχιάς του

κ.λ.π.

**Υ)** Αν μας δώσουν ότι η συνισταμένη δύναμη  $F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  πάνω στο σώμα είναι άθροισμα συνιστωσών, που η κάθε μια έχει τα τάδε και τάδε χαρακτηριστικά και ότι κάποιες ειδικές αρχικές συνθήκες οδήγησαν το σώμα σε ταλάντωση με εξίσωση κίνησης  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  (π.χ. εξαναγκασμένος αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση) τα πράγματα ξαναλλάζουν.

Άρα μια άσκηση αν δεν έχουμε επαρκείς πληροφορίες για τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα, προσπαθούμε να λύσουμε την άσκηση χρησιμοποιώντας όσο γίνεται πιο γενικό φορμαλισμό και προπάντων αποφεύγοντας έννοιες, αρχές και σχέσεις που συνδέονται με συγκεκριμένο τύπο δύναμης και συνεπώς με συγκεκριμένο τύπο κίνησης.

Στην εργασία μου **«Προσπάθεια για μια σωστή επίλυση ενός προβλήματος»** οι δυνάμεις δεν είναι χωροεξαρτώμενες. Συνεπώς αποφεύγω να χρησιμοποιήσω τον όρο «απλή αρμονική ταλάντωση», αλλά χρησιμοποιώ τον πιο γενικό όρο «αρμονική ταλάντωση». Έτσι αποφεύγω οποιαδήποτε αναφορά σε διατήρηση ενέργειας.

Με λίγα λόγια θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί αν δεν ξέρουμε τις ιδιαιτερότητες των δυνάμεων ή κάποιο άμεσο «υποκατάστατό» τους (π.χ. κάποιες πληροφορίες για την ενέργεια και τις ανταλλαγές της).

Αν δηλαδή ξέρουμε μόνο την εξίσωση κίνησης το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι ή να προσπαθήσουμε με κάποιο πείραμα να μάθουμε τις δυνάμεις ή να κάνουμε μόνο κινηματικές προβλέψεις (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση κ.λπ)

Χωρίς καμιά αμφιβολία όλα αυτά είναι και χρήσιμα αλλά δεν είναι ικανά για μια ισχυρή κάλυψη του φαινομένου της κίνησης.

**Ψτάνουμε λοιπόν σε ένα πάρα πολύ σημαντικό συμπέρασμα:**

*Δεν προχωράμε ποτέ σε προσδιορισμό της ποιότητας της δύναμης από τη εξίσωση κίνησης, αν δεν έχουμε ή δεν καταφέρουμε να βρούμε (π.χ. με πείραμα) άλλες πληροφορίες.*

#### **4ο ερώτημα**

Ποιο είναι το πιο συνηθισμένο λάθος που γίνεται αν αγνοήσουμε το τελευταίο σημαντικό συμπέρασμα που αναφέρατε;

#### **Απάντηση**

Αυτό που υπέδειξα ως λάθος στην προαναφερθείσα εργασία μου «Προσπάθεια για ...» και αυτό που κάνει για παράδειγμα το σχολικό βιβλίο:

Από την εξίσωση κίνησης  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  ενός σώματος μάζας  $m$ , περνά στην επιτάχυνση  $a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  και κατόπιν στη δύναμη  $F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  η οποία όπως βλέπουμε είναι γενικά μια αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

Κατόπιν καλεί σταθερά επαναφοράς  $D$  την ποσότητα  $m\omega^2$  και αντικαθιστά την ποσότητα  $A\eta\mu(\omega t + \varphi)$  με  $x$  οπότε η δύναμη παίρνει τη μορφή

$$F = -Dx \quad (6)$$

### **Και εδώ ακριβώς έγινε το λάθος!!!**

Χωρίς να έχει δοθεί κανένα στοιχείο για την ποιότητα της δύναμης  $F$ , η δύναμη αυτή από μια απλή συνάρτηση του χρόνου γίνεται αυθαίρετα χωροεξαρτώμενη και μάλιστα συντηρητική δύναμη.

Δηλαδή μια απλή αντικατάσταση μιας ποσότητας με το  $x$ , έγινε αυθαίρετα ένδειξη ποιότητας δύναμης και συνεπώς

- η κίνηση γίνεται α.α.τ.
- το σώμα συνδέεται με δυναμική ενέργεια
- η (ολική) ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή
- εμφανίζεται ελκτικό κέντρο

κ.λπ

Με την λανθασμένη αυτή αντιμετώπιση κάθε κίνηση που θα είναι αρμονική ταλάντωση, που θα έχει δηλαδή εξίσωση κίνησης της μορφής  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$ , θα καταλήγει σε α.α.τ. κάτι που προφανώς θα δημιουργήσει εκτροπές και επομένως ασκησιολογικές διαστροφές.

Με όλα αυτά όμως εκείνο που καταφέρνουμε είναι να κάνουμε παιδαγωγικές μεθόδους τις λανθασμένες συλλογιστικά πορείες, τη στιγμή μάλιστα που τα παιδιά είναι έτοιμα να ακούσουν το σωστό.

## **5ο ερώτημα**

Υπάρχει τέτοιος κίνδυνος εκτροπής στην ύλη που έχει το σχολικό βιβλίο;

### **Απάντηση**

Βεβαίως! Το έχουμε ήδη αναφέρει

α) Στην Εξαναγκασμένη Ταλάντωση:

Το καταληκτικό της στάδιο είναι αρμονική ταλάντωση το πλάτος της οποίας δίνεται με διάγραμμα στο σχολικό βιβλίο. Συνεπώς εύκολα τα εξωσχολικά βοηθήματα, το ψηφιακό σχολείο ή κάποιος θεματοδότης πανελλαδικών εξετάσεων κάποια στιγμή θα μετατρέψουν την εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση σε απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Στα Κύματα:

Οι κινήσεις των σημείων του μέσου είναι αρμονικές ταλαντώσεις και οι εξισώσεις κίνησής τους αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο. Άρρηγγορα οι κινήσεις αυτές θα γίνουν α.α.τ. και η ενέργεια των δομικών λίθων θα γίνει σταθερή κάτι που αντιβαίνει σε όλη τη μαθηματική δομή της θεωρίας των κυμάτων.

Για παράδειγμα ας δούμε τι έγινε στις πανελλαδικές εξετάσεις Φυσικής το 2017 **στο Θέμα Γ**



### γ) Στο Στερεό:

Εκεί ανακατεύονται μη συντηρητικές με συντηρητικές δυνάμεις (μη χωροεξαρτώμενες με χωροεξαρτώμενες).

Αν λοιπόν δημιουργηθεί σύστημα εξισώσεων και λυθούν οι δυνάμεις με μεταβλητή τη θέση  $x$  (αν δηλαδή γίνει απαλοιφή του χρόνου) τότε τριβές θα εμφανιστούν ως συντηρητικές και θα συνδεθούν με δυναμική ενέργεια και η κίνηση του στερεού θα γίνει α.α.τ.

Για παράδειγμα ας δούμε την εργασία μου «**Αναλύοντας τον ορισμό της α.α.τ.**»

### 6ο ερώτημα

Πότε πρέπει να κάνουμε ή να επιχειρούμε κινηματική επεξεργασία μιας κίνησης;

#### Απάντηση

Η κινηματική επεξεργασία μιας κίνησης, ο περιορισμός δηλαδή σε έναν υπολογισμό θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης και δύναμης ως συνάρτησης του χρόνου, σαφώς και είναι χρήσιμη και αρκετά έχει να προσφέρει. Και μάλιστα ανάλογα με τις ικανότητες και τα προσόντα που διαθέτει αυτός που διδάσκει, μπορούν να γίνουν κυριολεκτικά θαύματα.

Όμως η κίνηση δεν είναι μόνο μια εξίσωση και δύο παραγωγίσεις. Έχει Φυσική μέσα της.

Και όπως όλη η Φυσική δεν μπορεί να είναι μια περιορισμένη πρόβλεψη θέσεων, ταχυτήτων κ.λπ, αλλά εξασφάλιση της γενικότερης δυνατής πρόβλεψης.

Η έννοια «κίνηση», πανάκριβο διανοητικό απόκτημα της Φυσικής των Ανθρώπων μετά από προσπάθειες χιλιάδων χρόνων, δεν πρέπει να εξαντληθεί στις αλλαγές των θέσεων ενός σώματος, αλλά στη πρόβλεψη όλου του μέλλοντος με το οποίο προίκισε το σώμα η ποιότητα των δυνάμεων. Ο όρος «κίνηση» δε πρέπει να φτωχύνει σε μια εξίσωση κίνησης (αποτέλεσμα), αλλά πάμπλουτος να σταθεί εκεί που τον θέλουν οι δυνάμεις (τα αίτια).

Με μόνη την εξίσωση κίνησης και χωρίς την ποιότητα των δυνάμεων προβλέψεις γενικά δε μπορούν να γίνουν. Πρέπει λοιπόν ο καθηγητής που επιχειρεί κινηματική προσέγγιση να ξέρει, να είναι πεπεισμένος και να κατανοεί τα όριά της. Πρέπει να ξέρει ότι κάνει μια μερική επεξεργασία της κίνησης υπολογίζοντας μόνο μερικά μεγέθη, αλλά δεν κάνει πλήρη κάλυψη της κίνησης (π.χ. ενέργειες), μιας και δε μπορεί ούτε στο ελάχιστο να προβλέψει το μέλλον του σώματος, αν κάτι του συμβεί, αν συμμετάσχει δηλαδή σε κάποιο μελλοντικό φαινόμενο καθώς κινείται.

Ακόμη και το πιο απλό να συμβεί στο σώμα, όπως ας πούμε κάποιο χέρι να το απασχολήσει για λίγο, δεν έχουμε καμιά δυνατότητα να προβλέψουμε τι θα συμβεί αν δεν ξέρουμε την ποιότητα των δυνάμεων.

### 7ο ερώτημα

Όταν προβολές, ίχνη, «φαντάσματα», σκιές, φωτεινές κουκίδες laser κ.λπ. πηγαίνουν πέρα δώθε όπως πάει ένα σώμα που εκτελεί α.α.τ. [όταν δηλαδή η θέση των σκιών κ.λπ περιγράφεται από τη συνάρτηση  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$ ] μπορούμε να κάνουμε χρήση των όρων τους οποίους χρησιμοποιεί η Φυσική στην περιγραφή των (πραγματικών) κινήσεων και πότε;

#### Απάντηση

Με προβολές, σκιές, «φαντάσματα», φωτεινές κηλίδες κ.λ.π. δεν κάνουμε Φυσική, αλλά αν θελούμε δανειζόμαστε λέξεις από τη Φυσική για να δώσουμε κάποιες πληροφορίες για τη συμπεριφορά αυτών των «οντοτήτων».

Κάποιος «που είδε» ένα φάντασμα, αποκλείεται να μη χρησιμοποιήσει φράσεις όπως «το φάντασμα κινήθηκε» ή «το φάντασμα δε μετατοπίστηκε καθόλου» ή «το φάντασμα αύξησε την ταχύτητά του» καθώς τον κυνηγούσε διαγράφοντας κύκλους.

Πώς αλλιώς να πει αυτό που είδε ή νόμισε ότι είδε αν δε το «προβάλλει» στις καθημερινές του εμπειρίες;

Το ίδιο κάνουμε και με άλλες δανεικές από τη Φυσική λέξεις.

Λέμε επιτάχυνση στις καθημερινές μας λεκτικές συναλλαγές και εννοούμε γκαζώματα. Λέμε έργο και εννοούμε οτιδήποτε βγήκε από κάθε μορφής δουλειά (π.χ. ένα βιβλίο).

Οι άνθρωποι έχουν δικαίωμα αναφαίρετο να χρησιμοποιούν ό,τι θέλουν προκειμένου να συνεννοούνται μεταξύ τους. Τα ίδια ισχύουν και για όταν καταγίνονται με μια σκιά ή με μια προβολή, με ένα ίχνο, με ένα φάντασμα.... Χρησιμοποιούν διάφορες λέξεις....

Έτσι λοιπόν γι' αυτές τις «οντότητες» (έννοιες) οι λέξεις κίνηση, μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση κ.λπ ίσως είναι τελικά δανεικές από τη Φυσική, για την οποία όμως έχουν άλλη και πολύ μεγαλύτερη αξία και σημασία, αλλά δεν έχουν σχέση με αυτή.

**Όταν μιλάμε για προβολές, ίχνη, «φαντάσματα», σκιές, φωτεινές κουκίδες laser κ.λπ δανεικές λέξεις χρησιμοποιούμε, αλλά δεν κάνουμε Φυσική.**

Επομένως όταν χρησιμοποιούμε λέξεις όπως προβολές, σκιές, ίχνη κ.λπ μέσα στην τάξη πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί.

Δε είναι δυνατόν να προσπαθούμε να πείσουμε το μαθητή ότι για τις μεταβολές της ταχύτητας φταίει η δύναμη και μετά να του μιλάμε για μεταβολές ταχύτητας σκιάς ή προβολών ή «φαντασμάτων» σα να κάνουμε Φυσική....

Κι αν μας ρωτήσει κάποιος μαθητής ποιος φταίει για τις μεταβολές ταχύτητας της σκιάς ή της προβολής σημείου σε άξονα ή της φωτεινής κηλίδας ή.....ή.... τι θα του πούμε;

Προσωπικά προσπαθώ να αποφεύγω, όσο γίνεται, τη χρήση όρων Φυσικής κατά την ενασχόλησή μου με πράγματα που δεν ανήκουν στη Φυσική. Και η ανησυχία μου αυτή αυξάνει πάρα πολύ όταν πρέπει να μιλήσω σε μαθητές.

Πώς να το πω, το αποφεύγω....

Φράσεις που προσπαθώ να χρησιμοποιώ σε τέτοιες περιπτώσεις είναι κάτι σαν:

*«Η συντεταγμένη (ή η θέση) της προβολής του σημείου (ή της φωτεινής κηλίδας ή ....) ως συνάρτηση του χρόνου είναι.....» κ.λ.π.*

## **8ο ερώτημα**

Ο ορισμός της απλής αρμονικής ταλάντωσης (α.α.τ.) στο Λύκειο είναι κινηματικός, γίνεται δηλαδή μέσω της εξίσωσης κίνησης. Όπως όμως αποδείξατε αυτός ο ορισμός είναι λανθασμένος.

Το ερώτημα λοιπόν είναι τι κάνουμε; Διδάσκουμε τον δυναμικό ορισμό της α.α.τ. που είναι ο σωστός ή τον κινηματικό που είναι λανθασμένος, αλλά αναφέρει το σχολικό βιβλίο;

### **Απάντηση**

Στη Γ' Λυκείου, κατά τη διδασκαλία των ταλαντώσεων κάνουμε ό,τι ακριβώς γράφει το σχολικό βιβλίο. Είναι καταστροφικό να διδάξουμε σε παιδιά το σωστό όταν πρόκειται να διαγωνιστούν στο λάθος και να βαθμολογηθεί αυτό το λάθος ως σωστό.

Προσωπικά για να πω το σωστό μέσα στην αίθουσα, πρέπει να έχω απέναντί μου πολύ δυνατούς μαθητές, αλλά και πάλι ό,τι πω θα είναι μέσα στο φόβο μη γίνει μέσα τους καμιά λάθος μετάφραση όσων είπα.

Κατά συνέπεια το παραπάνω ερώτημα είναι ήδη εκ των πραγμάτων απαντημένο. Το μόνο λοιπόν που μπορώ να κάνω αυτή τη στιγμή είναι να καταθέσω τη γνώμη μου που είναι η άμεση επιλογή του σωστού.

**Αν μπορούσα να επιβάλλω να ξαναγραφεί το σχολικό βιβλίο θα απαιτούσα ο ορισμός της α.α.τ. να γίνει μέσω της δύναμης  $F = -Dx$  (δυναμικός ορισμός α.α.τ.) και όχι μέσω της εξίσωσης κίνησης (κινηματικός ορισμός α.α.τ.)**

Επειδή όμως, όπως εξηγήσαμε, το σχολικό βιβλίο δε βοηθά καθόλου, δυστυχώς πρέπει να μείνουμε στις εξισώσεις κίνησης.

Έτσι οποιοδήποτε πείραμα ή οποιαδήποτε κινηματική επεξεργασία πιστεύουμε ότι θα βοηθήσει τους μαθητές μας, ας την κάνουμε ως βοήθεια σε επιπλέον κατανόηση του φαινομένου. Κι αν η ικανότητά μας να αξιοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης είναι μεγάλη, σαφώς και να τις αξιοποιήσουμε μπροστά στα μάτια τους.

Αλλά θα πρέπει να τους δείχνουμε, έστω και διακριτικά και με πολλή προσοχή, τα αίτια... Τις δυνάμεις και το ρόλο που παίζει η ποιότητά τους...

.....

Η γνώση και η ικανότητα κάνουν την πείρα να φαίνεται αλλιώς... Και οι αιτίες κάνουν την αλήθεια αλλιώς να φαντάζει....

**Κυριακή 28 Φεβρουαρίου 2010**

*Θρασύβουλος Κων. Μαχαίρας  
Φυσικός*