Ηλεκτρικές Δυναμικές Γραμμές

Μια αρχική ιδέα

Σημειακό φορτίο q βρίσκεται για ευκολία συμβολισμών στην αρχή των αξόνων. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο $\vec{r}$ είναι

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad (1)$$

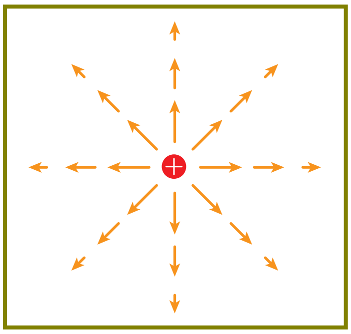
όπου $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{r}$

Σχεδιάζουμε την ένταση του πεδίου $\vec{E}(\vec{r})$ ή πιο απλά $\vec{E}$ σε αρκετά σημεία του επιπέδου θεωρώντας για παράδειγμα ότι το φορτίο q είναι θετικό.

Κατά τη σχεδίαση των διανυσμάτων $\vec{E}$

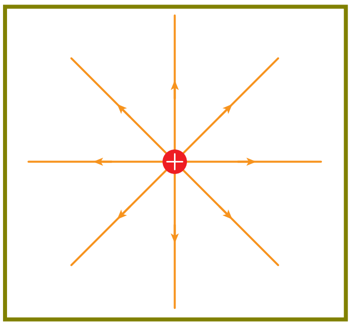
- προσπαθούμε να αποδώσουμε την κατεύθυνση και έστω ποιοτικά το μέτρο της έντασης
- προσπαθούμε τα διανύσματα της έντασης να είναι κατανεμημένα συμμετρικά γύρω από το φορτίο q *(Σχήμα 1)*

Σχήμα 1



Διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε «ομάδες» διανυσμάτων $\vec{E}(\vec{r})$ (ή πιο απλά $\vec{E}$) των οποίων όλα τα διανύσματα να εφάπτονται (να «βρίσκονται επάνω») σε κατάλληλες **γραμμές** στις οποίες αποδίδουμε «φορά» γραφής τη φορά της έντασης $\vec{E}$ *(Σχήμα 2)*

Σχήμα 2

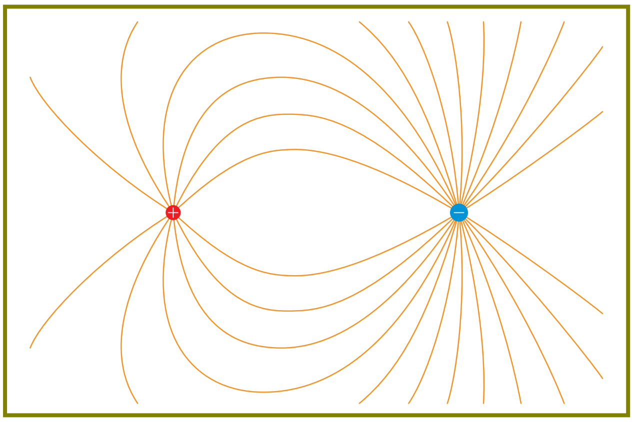


Οι **γραμμές** αυτές ονομάζονται **δυναμικές γραμμές** και όπως παρατηρούμε, ο σχεδιασμός τους εξασφάλισε αβίαστα, ότι κοντά στο φορτίο q, όπου το μέτρο της $\vec{E}$ είναι πιο μεγάλο, η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών είναι μεγαλύτερη.

Επέκταση της αρχικής ιδέας

Οι δυναμικές γραμμές, ως απόπειρα γραφικής απόδοσης του ηλεκτρικού πεδίου σημειακού φορτίου, επεκτείνονται και σε πιο πολύπλοκα ηλεκτρικά πεδία, για παράδειγμα σε ηλεκτρικό πεδίο δύο, τριών κ.λπ φορτίων, καθώς και σε άλλα πεδία όπως π.χ. στο μαγνητικό.

Σχήμα 3



Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε τώρα να κωδικοποιήσουμε τα πράγματα, αναδεικνύοντας τις τρεις βασικές **ιδιότητες των δυναμικών γραμμών,** που ουσιαστικά παίζουν και ρόλο ορισμού τους:

1. Η εφαπτομένη σε κάποιο σημείο μιας δυναμικής γραμμής είναι η διεύθυνση της έντασης του πεδίου στο εν λόγω σημείο
2. Η φορά της δυναμικής γραμμής σε κάποιο σημείο του χώρου δείχνει τη φορά της έντασης του πεδίου στο σημείο αυτό
3. Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σε κάποια «μικρή» περιοχή γύρω από κάποιο σημείο Μ υποδεικνύει το μέτρο της $\vec{E}$ στο σημείο αυτό

Με βάση τον παραπάνω «ορισμό» των δυναμικών γραμμών (τις τρεις ιδιότητές τους ουσιαστικά), εύκολα αποδεικνύεται ότι **οι δυναμικές γραμμές**:

- Πρέπει να αποδίδουν όσο γίνεται καλύτερα τις συμμετρίες ή μη του πεδίου
- Δεν πρέπει να τέμνονται
- Πρέπει με τον αριθμό τους να αποδίδουν το μέτρο του φορτίου από το οποίο ξεκινούν ή στο οποίο καταλήγουν. Για παράδειγμα από ένα φορτίο διπλάσιο από ένα άλλο, πρέπει να ξεκινάνε ή να καταλήγουν διπλάσιος αριθμός δυναμικών γραμμών
- Δεν πρέπει να σταματάνε απότομα («στον αέρα» δηλαδή), παρά μόνο σε αρνητικά φορτία ή όταν πλησιάζουν σε σημεία όπου η ένταση του πεδίου είναι μηδέν.
- Αν δεν είναι κλειστές γραμμές, σχεδιάζονται **συνήθως** να πηγάζουν από θετικά φορτία και να καταλήγουν σε αρνητικά. Αν δεν υπάρχει αρνητικό φορτίο για να καταλήξουν, συνήθως εκτείνονται μέχρι το άπειρο. Αν δεν υπάρχει θετικό φορτίο για να πηγάσουν, τις ζωγραφίζουμε να καταλήγουν συνήθως στο αρνητικό φορτίο προερχόμενες από το άπειρο

Προσπάθεια «μαθηματικοποίησης» της έννοιας της δυναμικής γραμμής και προσδιορισμός της χρησιμότητας του «ορισμού» τους

Αν $\vec{E}(x,y,z)$ είναι η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου και $d\vec{a}$ είναι το απειροστό τμήμα μιας τυχαίας επιφάνειας *S*, τότε η ηλεκτρική ροή *(ροή πεδίου ή αλλιώς ροή της έντασης $\vec{E}$)* μέσα από την επιφάνεια S είναι

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \qquad (2)$$

Με την ιδιότητα 3 των δυναμικών γραμμών «απαιτήσαμε» ουσιαστικά το <u>μέτρο της έντασης $\vec{E}$ να είναι ανάλογο του αριθμού των δυναμικών γραμμών</u> ανά μονάδα επιφάνειας που τέμνει κάθετα τις δυναμικές γραμμές.

Συνεπώς λόγω της σχέσης (2), **η ροή Φ_E του πεδίου μέσα από την επιφάνεια S <u>είναι ανάλογη</u> του αριθμού N_S των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν αυτή την επιφάνεια**

$$\Phi_E = kN_S \qquad (3)$$

[Για την απαραίτητη, βάσει του ορισμού, καθετότητα των δυναμικών γραμμών στην S δε χρειάζεται ιδιαίτερη αναφορά γιατί εξασφαλίζεται από το εσωτερικό γινόμενο που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα (2)]

Η σταθερά αναλογίας k μεταξύ Φ_E και πλήθους δυναμικών γραμμών N_S δε μπορεί να έχει την τιμή άπειρο, γιατί

- σε καμιά, μα σε καμιά σταθερά δε δίνουμε την τιμή άπειρο, αν δε θέλουμε να αυτοκτονήσουν όλοι οι επόμενοι υπολογισμοί μας
- δε θα μπορέσουμε να διαφοροποιήσουμε την πυκνότητα των δυναμικών γραμμών ώστε να αποδοθεί το μέτρο της έντασης από σημείο σε σημείο, αφού το πλήθος των δυναμικών γραμμών θα βγαίνει συνεχώς και παντού άπειρο
- η ροή Φ_E είναι πεπερασμένος αριθμός, οπότε στην περίπτωση που $k = \infty$, ο αριθμός των δυναμικών γραμμών N_S που διαπερνούν την οποιαδήποτε επιφάνεια S θα πρέπει να είναι πάντα 0. Επομένως δε θα έχουμε πουθενά δυναμικές γραμμές! Δηλαδή η τιμή $k = \infty$ καταργεί την έννοια της δυναμικής γραμμής

Το να δεχτούμε λοιπόν για τη σταθερά αναλογίας k κάποια πεπερασμένη τιμή, είναι το μόνο που μπορούμε να κάνουμε. Αλλά το πιο σημαντικό είναι το ότι <u>η τιμή της k δε χρειάζεται ούτε να προσδιοριστεί ούτε να είναι η ίδια κάθε φορά (σε κάθε πρόβλημα).</u>

Συνήθως δίνουμε αυθαίρετα μια τιμή στη «σταθερά αναλογίας» k, την οποία κρατάμε σταθερή σε όλο το πρόβλημα που εξετάζουμε. Αν βέβαια θέλουμε μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της σε κάποιο άλλο πρόβλημα.

Δεν είναι παράξενο αυτό. Πορευόμαστε δηλαδή με τον τρόπο που χειρίζομαι τις δυναμικές ενέργειες για τις οποίες αλλάζοντας το σημείο αναφοράς *(σημείο όπου η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν)* από πρόβλημα σε πρόβλημα, αλλάζουμε τις τιμές της από πρόβλημα σε πρόβλημα. Στη δυναμική ενέργεια έχουμε μια αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Στις δυναμικές γραμμές έχουμε μια αυθαίρετη «πολλαπλασιαστική σταθερά».

Η «απόλυτη» τιμή του k δεν έχει κάποια ιδιαίτερη αξία στη Φυσική, γιατί μέσω της έννοιας της δυναμικής γραμμής δεν αναζητούμε ένα ακόμη αυστηρά μαθηματικοποιημένο και καλά ορισμένο φυσικό μέγεθος για την περιγραφή του πεδίου, αλλά ένα τρόπο γραφικής-ποιοτικής απόδοσης (σχεδίασης) κάποιων πληροφοριών που απορρέουν από τα ήδη πολύ καλά και αυστηρά ορισμένα φυσικά μεγέθη *«ένταση $\vec{E}$»* και *«δυναμικό V»*.

Τρία ερωτήματα

Οι δυναμικές γραμμές είναι ή δεν είναι φυσικό μέγεθος;
Αν είναι τότε ποιος είναι ο αυστηρός (μαθηματικός) ορισμός τους;
Αν δεν είναι γιατί ορίστηκαν μέσω των ιδιοτήτων τους και γιατί επιχειρείται η έστω και υποτυπώδης «μαθηματικοποίησή τους;

<u>Απάντηση:</u>

Ακόμη κι αν δώσουμε ή προσδιορίσουμε συγκεκριμένη αλλά πεπερασμένη τιμή στη «σταθερά αναλογίας» k, τα «πράματα» δε θα αποκτήσουν τη μαθηματική αυστηρότητα που απαιτείται για να μετατραπεί η έννοια της δυναμικής γραμμής σε φυσικό μέγεθος.

Πράγματι:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα θετικό σημειακό φορτίο q. Από κάθε σημείο του χώρου (πεδίου) γύρω από το q υπάρχει ένταση $\vec{E}$ και συνεπώς πρέπει από κάθε σημείο να περνά μία ή περισσότερες δυναμικές γραμμές που η πυκνότητά τους ανά μονάδα επιφάνειας να είναι ανάλογη του μέτρου της $\vec{E}$.

Επομένως από κάθε σημείο του χώρου πρέπει να περνά μία τουλάχιστον δυναμική γραμμή και όλες αυτές οι γραμμές να ξεκινούν από το φορτίο q. Τα σημεία του χώρου όμως όπου υπάρχει $\vec{E}$ είναι άπειρα. Άρα και ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που θα υπάρχουν στο πεδίο γύρω από το q θα είναι πάντα άπειρος και συνεπώς πάντα από το q θα ξεκινά άπειρος αριθμός δυναμικών γραμμών.

Δηλαδή επιλέξαμε να κάνουμε φυσικό μέγεθος που πάντα θα έχει την τιμή άπειρο!

Και δεν είναι μόνο αυτό!

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που πηγάζουν από ένα φορτίο και που είναι πάντα άπειρος συνδέθηκε με τη ροή του $\vec{E}$ μέσω των σχέσεων (2) και (3) που είναι πεπερασμένος.

Άρα ή πρέπει να αποσυνδεθούν οι σχέσεις (2) και (3) από τις δυναμικές γραμμές και άρα να καταρρεύσει ο ορισμός τους ή να δεχτούμε ότι k=0 και να οδηγηθούμε σε χειρισμό απροσδιορίστων μορφών $0 \cdot \infty$. Αλήθεια για ποιο λόγο να γίνουν όλα αυτά; Τί νόημα έχει η εισαγωγή ενός φυσικού μεγέθους που θα έχει πάντα την τιμή ∞ και που φιλοδοξεί να δώσει εικόνα του $\vec{E}$ που έχουμε ήδη αυστηρά ορίσει;

Τι φυσικό μέγεθος να είναι δηλαδή μια «πυκνότητα γραμμών», η οποία, με δεδομένο ότι πρέπει να είναι καλά ορισμένη σε κάθε σημείο του χώρου κινδυνεύει να μας οδηγήσει

- σε απειρισμούς πυκνοτήτων σε κάποια σημεία
- σε απειρισμούς γραμμών που θα πηγάζουν από τα φορτία
- σε αδιέξοδα όπου ενώ θα υπάρχουν σημεία με καλά ορισμένη την ένταση $\vec{E}$ (π.χ. μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο ίσα φορτία), οι δυναμικές γραμμές θα φαίνεται σα να πηγάζουν ή να καταλήγουν σε σημεία όπου η $\vec{E}$ είναι μηδέν *(Σχήμα 5)*
- σε αδιέξοδα στα σημεία που μηδενίζεται η ένταση μιας και δεν πρέπει να τα «ακουμπούν»
- σε κατάργηση των σχέσεων ορισμού (2) και (3) και άρα του αρχικού μας σκοπού να ζωγραφίσουμε το πεδίο

κ.λπ.

Όπως ξαναείπαμε, ο σκοπός εισαγωγής της έννοιας της δυναμικής γραμμής δεν είναι να δώσουμε ακόμη ένα φυσικό μέγεθος περιγραφής του πεδίου με γραμμές, κάτι που τελικά δεν είναι μαθηματικά εφικτό, αλλά και ούτε απαραίτητο.

Σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, που έτσι κι αλλιώς είναι γεμάτο με διανύσματα $\vec{E}$ και πιθανώς και με βαθμωτά μεγέθη όπως το δυναμικό V, δηλαδή σε έναν χώρο όπου ήδη υπάρχουν φυσικά μεγέθη καλά ορισμένα, εκείνο που επιδιώκουμε με τις δυναμικές γραμμές είναι να δώσουμε μια αίσθηση του πεδίου, μέσω της οποίας **θα αναδεικνύονται με ποιοτικό (και όχι ποσοτικό) τρόπο κάποια χαρακτηριστικά του πεδίου,** όπως το *«σε ποιες περιοχές το πεδίο είναι ισχυρότερο», «κατά πού περίπου κατευθύνεται η* $\vec{E}$ *σε κείνη ή σε κείνη την περιοχή»* κ.λπ.

Ας το πούμε διαφορετικά:

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών και οι δυναμικές γραμμές γενικά δεν είναι φυσικό μέγεθος, γιατί εκτός των άλλων, δε χρειαζόμαστε κάποιο φυσικό μέγεθος επιπλέον της $\vec{E}$ και του V για την ποσοτική περιγραφή του πεδίου.

Όμως οι δυναμικές γραμμές, παρόλο που δεν είναι φυσικό μέγεθος, δεν παύουν να έχουν έναν «ορισμό», έστω κι αν αυτός ο «ορισμός» δεν είναι αυστηρός, έστω κι αν ουσιαστικά συνίσταται από απαρίθμηση τριών ιδιοτήτων.

Το να «ορίσουμε»-χρησιμοποιήσουμε όμως «κάτι» στη Φυσική, το να δώσουμε δηλαδή όνομα και να μετρήσουμε «κάτι» στη Φυσική, είναι εύκολο. Μπορούμε να το κάνουμε με χιλιάδες «ποσότητες», ποσότητες, «πράγματα».

Ο ορισμός όμως που θα δώσουμε σε αυτό το «κάτι» πρέπει απαραίτητα να διαθέτει το κύριο χαρακτηριστικό όλων των ορισμών: Να είναι χρήσιμος!!! Αλλιώς ορισμός ουσιαστικά δεν θα υπάρξει, γιατί και να διατυπωθεί, σύντομα θα καταρρεύσει και θα ξεχαστεί λόγω ... «αχρηστίας».

Έτσι καταλήγουμε στο σημαντικό ερώτημα αν, πού και με ποιό τρόπο ο «ορισμός» της δυναμικής γραμμής είναι χρήσιμος στη Φυσική.

Ας δούμε:

Η έννοια της δυναμικής γραμμής που «ορίζεται» μέσα από τις τρεις ιδιότητες της που ανέφερα στη σελίδα 2, είναι μια χρήσιμη έννοια

- γιατί θέλουμε να έχουμε μια *«ικανοποιητική σχεδίαση»* του πεδίου,
- γιατί είναι μια έννοια παιδαγωγικά χρήσιμη, αφού οδηγεί σε γρήγορο ποιοτικό σχεδιασμό του πεδίου οπότε και τα παιδιά και εμείς αποκτάμε γρήγορα μια καλή αντίληψη του πεδίου
- γιατί αρκετές φορές μέσω ενός εύκολου σχεδίου έχουμε αρκετές πληροφορίες και για το πεδίο και για όσα πιθανώς εξετάζουμε μέσα σε αυτό (κινήσεις φορτίων)

Επομένως οι δυναμικές γραμμές είναι χρήσιμες όταν μπορέσουμε να τις σχεδιάσουμε.

Άρα:

Ο ορισμός των δυναμικών γραμμών είναι χρήσιμος όταν μας βοηθήσει να αποκτήσουμε για το πεδίο μια τρισδιάστατη «αξιοπρεπή» αίσθησή του και κυρίως να συνειδητοποιήσουμε την ανεξάρτητη φυσική του οντότητα. Όταν δηλαδή μας βοηθήσει να φανταστούμε το πεδίο στο χώρο καταρχήν ως αυτοδύναμη παρουσία και μετά να προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε κάποια «ζωγραφιά» του (όχι κατ΄ ανάγκη προβολή του) σε επιλεγμένο επίπεδο.

Ό,τι λοιπόν ακολουθήσει σχετικό με τις δυναμικές γραμμές θα αφορά το μοναδικό σκοπό του «ορισμού» τους. ***Τη ˝ζωγραφιά˝ του πεδίου, τη ζωγραφιά σε δύο διαστάσεις μιας φυσικής οντότητας που λέγεται πεδίο.***

Μετά από όλα αυτά είμαστε έτοιμοι να απαντήσουμε στα αρχικά ερωτήματα:

α) *Οι δυναμικές γραμμές είναι ή δεν είναι φυσικό μέγεθος;*

β) *Αν είναι τότε ποιος είναι ο αυστηρός (μαθηματικός) ορισμός τους;*

γ) *Αν δεν είναι γιατί ορίστηκαν μέσω των ιδιοτήτων τους και γιατί επιχειρείται η έστω και υποτυπώδης «μαθηματικοποίησή τους;*

Απάντηση:

α) Όχι

β) Οι δυναμικές γραμμές δεν είναι φυσικό μέγεθος και συνεπώς δεν υπάρχει αυστηρός μαθηματικός ορισμός τους. Υπάρχει όμως επιθυμία μας να ζωγραφίζουμε το πεδίο χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την ένταση $\vec{E}$. Και αυτό το επιχειρούμε μέσα από τις τρεις ιδιότητες των δυναμικών γραμμών της σελίδας 2 και των σχέσεων (2) και (3).

γ) Για να έχουμε μια «ζωγραφιά» του πεδίου, όπου θα αποδίδονται κάποιες αναλογίες του και κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά του *(θα το δούμε καλύτερα παρακάτω)*. Αυτή ακριβώς η δυνατότητα απεικόνισης του πεδίου είναι, παιδαγωγικά τουλάχιστον, αρκετά χρήσιμο εργαλείο!

4ο ερώτημα

Ας αλλάξουμε λίγο τον προβληματισμό μας και ας το θέσουμε αλλιώς το θέμα:
Ο συνδυασμός των σχέσεων (2) και (3) οδηγεί στη σχέση

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = kN_S \tag{3α}$$

Αφού η ροή Φ_E είναι φυσικό μέγεθος και μάλιστα καλά ορισμένο, δε θα έπρεπε, λόγω της σχέσης (3α), να είναι επίσης φυσικό μέγεθος το πλήθος N_S των δυναμικών γραμμών και συνεπώς και οι δυναμικές γραμμές;

Απάντηση:

Η ηλεκτρική ροή Φ_E ορίζεται μέσω της σχέσης $\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$. Συνεπώς είναι φυσικό μέγεθος γιατί ορίζεται αυστηρά μέσα από ένα εσωτερικό γινόμενο μεγεθών καλά ορισμένων μεγεθών, με ένα ολοκλήρωμα και με πράξεις που δεν οδηγούν σε απειρισμούς ή σε απροσδιόριστες μορφές και γενικά σε προβληματικά αποτελέσματα.

Με άλλα λόγια το Φ_E δεν είχε εκ των προτέρων ιδιότητες, αλλά όλες τις ιδιότητες του τις αποκτά από τον ορισμό του $\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$. Οι ιδιότητες του είναι συνεπείς, αυστηρά θεμελιωμένες και συνεπώς το Φ_E αποκτά την αξία ενός φυσικού μεγέθους αρκεί να είναι χρήσιμος ο ορισμός του. Και είναι!

Το γινόμενο kN_S είναι ένα γινόμενο όπου οι παράγοντες έχουν ήδη «διαμορφωμένες» τις ιδιότητές τους. Ο παράγοντας N_S είναι όχι μόνο αριθμός γραμμών δηλαδή εννοιών που ήδη έχουν μαθηματικές ιδιότητες, αλλά αριθμός δυναμικών γραμμών δηλαδή εννοιών που ήδη έχουν τροφοδοτηθεί με τις τρεις ιδιότητες της σελίδας 2.

Επίσης το k είναι μια σταθερά αναλογίας που μπήκε αυθαίρετα, ουσιαστικά μέσω της ιδιότητας 3 που μαθηματικά εκφράζεται με την παρακάτω σχέση (4).

Όταν λοιπόν εξισώνουμε δύο ποσότητες, την Φ_E με την kN_S, που έχουν ήδη δικές τους ιδιότητες, δε σημαίνει ότι ορίζουμε και τίποτε συνεπές ή τίποτε μαθηματικά αυστηρό.
Πράγματι, όπως δείξαμε παραπάνω, αυτή η εξίσωση των δύο ποσοτήτων οδηγεί σε αδιέξοδα και βέβαια ανεπίτρεπτους απειρισμούς.

Ας πω τα ίδια με άκομψο τρόπο, αλλά ίσως πιο κατανοητά:

Η κατάσταση είναι σα να γράφουμε ότι η ηλεκτρική ροή Φ_E είναι ανάλογη με τον αριθμό N_S των ... μπιζελιών που θα βάλουμε σε κάθε σημείο του πεδίου για να αποκτήσουμε μια εικόνα της έντασης $\vec{E}$ και μετά να βλέπουμε το $\Phi_E = kN_S$ και να νομίζουμε ότι επειδή γράψαμε μια ισότητα μεταξύ ετερόκλητων πραγμάτων, έχουμε το δικαίωμα να πούμε ότι το μπιζέλι και ο αριθμός των μπιζελιών είναι μέγεθος της Φυσικής, γιατί και η ροή Φ_E με την οποία το μπλέξαμε για «παράξενους» λόγους, είναι φυσικό μέγεθος.

Πρέπει όσο πιο γρήγορα να ξεκαθαρίσουμε ότι η ισότητα $\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = kN_S$ δεν είναι μια συνεπής μαθηματικά σχέση και συνεπώς δεν πρέπει να την παίρνουμε και ως αυστηρή ισότητα.

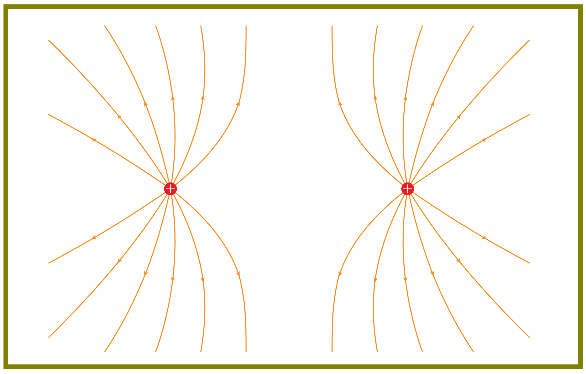
Ο «ορισμός» των δυναμικών γραμμών μέσα από τις τρεις ιδιότητές τους που καταγράφονται στη σελίδα 2, καθώς και η σοβαροφανής «μαθηματικοποίησή» τους μέσω της σχέσης (3α) είναι μια πετυχημένη *(αλλά με όλα τα τρωτά που περιγράψαμε)* προσπάθεια να ζωγραφίσουμε τις αναλογίες, την ισχύ και γενικά κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά ενός πεδίου (συμμετρίες κ.λπ), το οποίο έτσι κι αλλιώς περιγράφεται αυστηρά με το $\vec{E}$.

5ο ερώτημα

Ξέρουμε ότι εφαπτομενικά σε κάθε δυναμική γραμμή μπορούμε να σχεδιάσουμε την ένταση του πεδίου αποδίδοντας αυστηρά την κατεύθυνση της $\vec{E}$ και ποιοτικά το μέτρο της. Άρα σε κάθε σημείο μιας δυναμικής γραμμής υπάρχει (μπορεί να σχεδιαστεί) μια ένταση $\vec{E}$.
Το αντίθετο ισχύει; Δηλαδή σε όποιο σημείο Μ ενός πεδίου υπάρχει ένταση, υπάρχει και μια δυναμική γραμμή που να περνά από το Μ και να «περιέχει» (κουβαλά) εφαπτομενικά πάνω της την ένταση στο Μ;

Απάντηση:

Αν μείνουμε «κολλημένοι» στο ότι οι δυναμικές γραμμές πρέπει να ξεκινάνε πάντα από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά, η απάντηση είναι **όχι!** Δηλαδή ενώ όπου σχεδιάζουμε δυναμική γραμμή υπάρχει και ένταση $\vec{E}$, το αντίθετο δεν ισχύει. Όπου υπάρχει ένταση δε μπορούμε πάντα να ζωγραφίσουμε και μια δυναμική γραμμή.

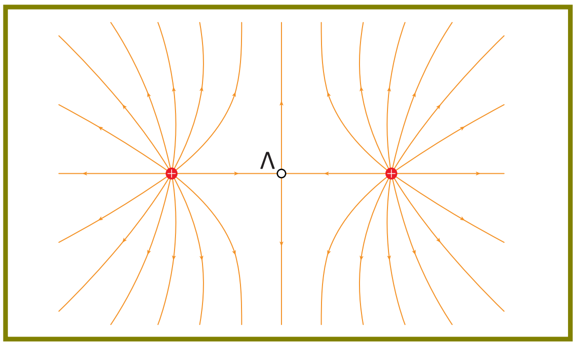


Σχήμα 4

Ας σκεφτούμε την περίπτωση δύο ίσων φορτίων. Σε κάθε σημείο της μεσοκάθετης στην ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία, υπάρχει και υπολογίζεται εύκολα η ένταση $\vec{E}$ του πεδίου. Όμως δυναμική γραμμή που να περιέχει αυτές τις εντάσεις δεν υπάρχει (δε μπορεί να ζωγραφιστεί), γιατί δε μπορεί να ζωγραφιστεί γραμμή που να ξεκινά ή να καταλήγει σε φορτίο και να περιέχει τα διανύσματα της έντασης στην μεσοκάθετο *(Σχήμα 4)*

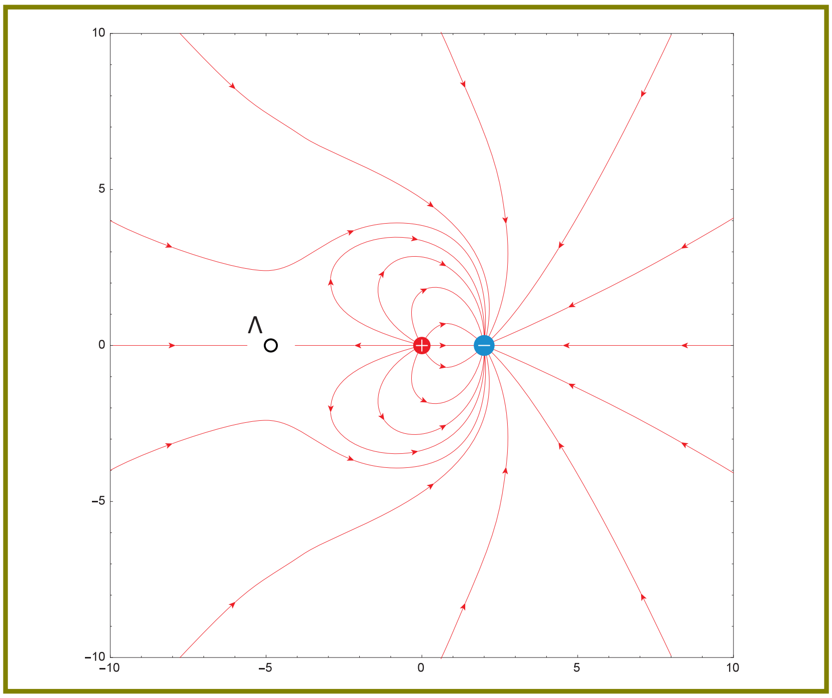
Αν όμως σκεφτούμε ότι ο ορισμός των δυναμικών γραμμών γίνεται μέσω των τριών ιδιοτήτων που αναφέρθηκαν στη σελίδα 2, τότε δυναμικές γραμμές μπορούν να σχεδιαστούν για όλα $\vec{E}$, αλλά χωρίς να πηγάζουν ή να καταλήγουν σε φορτία. Θα ζωγραφιστούν να πλησιάζουν **(όχι να πηγάζουν ή να ξεκινούν)** σε σημεία όπου $\vec{E}=\vec{0}$. Τα σημεία αυτά τα δείχνουμε με ένα άδειο κυκλάκι γιατί δεν είναι φορτία *(Σχήμα 5)*

Σχήμα 5



Αν δηλαδή απαγκιστρωθούμε από το σλόγκαν *«οι δυναμικές γραμμές πηγάζουν από θετικά και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία»* και πρέπει οπωσδήποτε να απαγκιστρωθούμε, τότε το *Σχήμα 3* γίνεται πολύ πιο ισχυρό, πολύ πιο πληροφοριακό! Γίνεται *Σχήμα 6*

Σχήμα 6



Σχεδιάζοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο στο ... χώρο

Όπως είπαμε το μέτρο της έντασης είναι ανάλογο του αριθμού των δυναμικών γραμμών ανά μονάδα επιφανείας που κόβουν κάθετα την επιφάνεια.

Αν σε κάποιο τυχαίο σημείο Μ ενός ηλεκτρικού πεδίου, $\vec{E}(x,y,z)$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, $d\vec{a}$ το απειροστό τμήμα μιας επιφάνειας S που περιέχει το τυχαίο σημείο Μ που εξετάζουμε και k η σταθερά αναλογίας την οποία ας επιλέξουμε θετική. Τότε

$$\vec{E}(x,y,z)\cdot d\vec{a} = k\ dn \qquad (4)$$

όπου $|dn|$ το πλήθος των δυναμικών γραμμών που διέρχονται καθέτως από τη στοιχειώδη επιφάνεια $d\vec{a}$

Παίρνοντας επιφανειακό ολοκλήρωμα σε κλειστή επιφάνεια S στην προηγούμενη σχέση, προκύπτει

$$\oint_S \vec{E}(x,y,z)\cdot d\vec{a} = kN' \qquad (5)$$

όπου N=$|N'|$ ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν καθέτως την επιφάνεια S

Λόγω του ***νόμου του Gauss***

$$\oint_S \vec{E}(x,y,z)\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{ολ}}{\varepsilon_0} \qquad (6)$$

η σχέση (5) δίνει

$$\frac{Q_{ολ}}{\varepsilon_0} = kN' \Rightarrow N' = \frac{Q_{ολ}}{\varepsilon_0 k} \qquad (7)$$

όπου ε_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού και $Q_{ολ}$ το ολικό φορτίο που περικλείει η S.

Συνεπώς ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από μια επιφάνεια S *(εισέρχονται αν $N'<0$ δηλαδή αν $Q_{ολ}<0$, εξέρχονται αν $N'>0$ δηλαδή αν $Q_{ολ}>0$)* είναι

$$N = \frac{|Q_{ολ}|}{\varepsilon_0 k} \qquad (8)$$

Συμπέρασμα: *Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από μια κλειστή επιφάνεια S είναι ανάλογος του φορτίου που περικλείεται στην επιφάνεια.*

Παρατηρήσεις:

1) Αφού το σχήμα της επιφάνειας S δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς μας μπορούμε για ευκολία, να πάρουμε ως επιφάνεια S την επιφάνεια μιας σφαίρα,.
Μπορούμε επίσης εύκολα να βγάλουμε συμπεράσματα για τμήματα επιφάνειας αρκεί να βρούμε συμμετρίες ή να λύσουμε κατάλληλα ολοκληρώματα.

2) Το N είναι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που «φεύγουν» από το $Q_{ολ}$ *(αν $Q_{ολ}>0$)* **για όλο το χώρο** γύρω από αυτό ή καταλήγουν στο $Q_{ολ}$ *(αν $Q_{ολ}<0$)* προερχόμενες **από όλο το χώρο**.

3) Το πιο πιθανό είναι το N να μην είναι ακέραιος, αλλά αυτό δε μας πειράζει. Μπορούμε να μεγαλώσουμε τη σταθερά αναλογίας k, οπότε ζωγραφίζουμε πιο πολλές δυναμικές γραμμές ή ελαττώνουμε την k οπότε ζωγραφίζουμε λιγότερες. Η k, είτε μεγάλη είτε μικρή, ως σταθερά αναλογίας k μας χρειάζεται και όχι ως ακριβή τιμή για να υπολογίσουμε ακριβή αριθμών δυναμικών γραμμών.

Μη ξεχνάτε ότι σκοπός μας είναι να ζωγραφίσουμε το πεδίο τηρώντας κάποιες αναλογίες από σημείο σε σημείο ή να αποδώσουμε διάφορα πεδία τηρώντας επίσης κάποιες αναλογίες. Σκοπός μας δεν είναι να αναδείξουμε με μαθηματική ακρίβεια το πλήθος των δυναμικών γραμμών, το οποίο στο κάτω κάτω είναι μέγεθος άχρηστο. Αν θέλουμε μαθηματική αυστηρότητα καταφεύγουμε στην ένταση ή στο δυναμικό

Τι να το κάνουμε το ακριβές πλήθος των δυναμικών γραμμών σε κάποια σημεία, το οποίο, αν δε μας οδηγήσει σε συλλογιστικά αδιέξοδα, πιθανώς θα μουτζουρώσει όλο το χώρο;

4) Αν έχουμε δύο φορτία q_1 και q_2 και θέλουμε να βρούμε το λόγο των δυναμικών γραμμών που θα ζωγραφίσουμε γύρω τους *(προσέξτε, το λόγο θέλουμε και όχι τον ακριβή αριθμό)* εφαρμόζουμε τη σχέση (8)

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν ή καταλήγουν στο q_1 είναι $N_1 = \dfrac{|q_1|}{\varepsilon_0 k}$

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν ή καταλήγουν στο q_2 είναι $N_2 = \dfrac{|q_2|}{\varepsilon_0 k}$

Άρα **ο λόγος του αριθμού των δυναμικών γραμμών** που ξεκινούν ή καταλήγουν στο q_1 προς τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν ή καταλήγουν στο q_2 είναι

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{|q_1|}{|q_2|} \tag{9}$$

Έστω ότι $q_2 = 2q_1$. Τότε λόγω της σχέσης (9) προκύπτει $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{1}{2}$ και συνεπώς γύρω από το q_2 πρέπει να ζωγραφίσουμε διπλάσιο αριθμό γραμμών από αυτές που θα ζωγραφίσουμε γύρω από το q_1.

Βλέπετε δηλαδή ότι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών δεν επιβάλλεται από τη σταθερά αναλογίας k, αλλά από την ανάγκη να αποδώσουμε γραφικά και όσο καλύτερα τα πεδία.

5) Οι ιδιότητες, οι αναλογίες, οι σχέσεις και γενικώς όσα σημαντικά χαρακτηριστικά εντοπίσουμε για το πεδίο, αφορούν **γενικά** το χώρο και **συνεπώς ο σχεδιασμός των δυναμικών γραμμών αφορά γενικά το χώρο και όχι το επίπεδο.**

Επειδή όμως σχεδόν ποτέ δε σχεδιάζουμε τρισδιάστατα πράγματα *(εκτός αν έχουμε υπολογιστή με τίποτε περίεργα προγράμματα)*, θα πρέπει κατά τον σχεδιασμό των δυναμικών γραμμών στο επίπεδο

(i) να διατηρήσουμε όσο περισσότερα σημαντικά χαρακτηριστικά από εκείνα που εντοπίσαμε για το χώρο,

(ii) να «θυσιάσουμε», αν χρειαστεί, κάποιες ακρίβειες στα νούμερα

(iii) να «θυσιάσουμε», αν χρειαστεί, κάποιες μαθηματικές απαιτήσεις της Φυσικής.

<u>παράδειγμα στο (i):</u>

Έστω το ηλεκτρικό πεδίο που σχηματίζεται γύρω από δύο σημειακά φορτία $q_1>0$ και $q_2<0$ με $|q_1| = 2|q_2|$. Για να ζωγραφίσουμε το πεδίο αυτό, πρέπει να σκεφτούμε ότι **<u>η ζωγραφιά μας αφορά στο χώρο</u>** και συνεπώς ότι <u>στο χώρο</u> θα έχουμε

- διπλάσιο αριθμό γραμμών γύρω από το q_1
- συμμετρία σε περιστροφή γύρω από την ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία.

Αυτή την εικόνα του χώρου προσπαθούμε να αποδώσουμε όσο καλύτερα και στο επίπεδο έστω κι αν οι δύο εικόνες *(εικόνα χώρου και εικόνα επιπέδου)*, όπως θα δείξουμε παρακάτω, δε συμβιβάζονται μεταξύ τους.

Άρα <u>**και** στο επίπεδο</u>

- ζωγραφίζουμε να ξεκινούν από το q_1 δυναμικές γραμμές, διπλάσιες σε αριθμό από όσες θα ζωγραφίσουμε να καταλήγουν στο q_2. Προφανώς κάποιες από τις γραμμές του q_1 «χάνονται» χωρίς επιστροφή στο άπειρο
- η ζωγραφιά μας έχει συμμετρία ως προς την ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία

<u>παράδειγμα στο (ii):</u>

Έστω ότι έχουμε λίγο πιο «δύσκολα» νούμερα και η (9) καταλήγει στη σχέση $\frac{N_1}{N_2} = \frac{2{,}4}{1{,}76}$.

Αυτό σημαίνει ότι αν θέλουμε να είμαστε συνεπείς με τον ορισμό των δυναμικών γραμμών και με τη ″ζωγραφική απαίτηση″ του ορισμού τους, πρέπει για κάθε 240 δυναμικές γραμμές που θα ζωγραφίσουμε γύρω από το q_1, να ζωγραφίζουμε 176 γραμμές γύρω από το q_2. Ή για κάθε 40 από το ένα, 22 για το άλλο κ.λπ

Όμως ποτέ σχεδόν δεν απαιτούνται τέτοιες «λεπτομέρειες-αυστηρότητες» όταν χειριζόμαστε δυναμικές γραμμές και συνεπώς όταν τα πράγματα δεν είναι απλά, όπως π.χ. στην περίπτωση $\frac{N_1}{N_2} = \frac{2{,}4}{1{,}76}$, προσπαθούμε όχι να αποδώσουμε την ακριβή αναλογία, αλλά έστω κάποια προσεγγιστική αναλογία.

Στην περίπτωση $\frac{N_1}{N_2} = \frac{2{,}4}{1{,}76}$ για παράδειγμα, αρκεί να ζωγραφίσουμε γύρω από το q_2 περίπου τα 2/3 των γραμμών που θα ζωγραφίσουμε γύρω από το q_1.

<u>παράδειγμα στο (iii):</u>

Στο πεδίο γύρω από ένα σημειακό φορτίο q η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σε απόσταση r από το φορτίο είναι $\frac{N}{4\pi r^2}$.

Ελαττώνεται δηλαδή με το σωστό ρυθμό $\frac{1}{r^2}$, μιας και ο συνολικός αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν κάθε επιφάνεια σφαίρας που περικλείει το q πρέπει να είναι σταθερός N.

<u>Στο επίπεδο όμως αυτό δε μπορεί να αποδοθεί.</u> Έτσι όταν ζωγραφίζουμε στο επίπεδο, το πεδίο γύρω από ένα σημειακό φορτίο q *(όπως π.χ. αυτό του σχήματος 2)*, η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σε απόσταση r από το φορτίο αποδίδεται λανθασμένα ως $\frac{N}{2\pi r}$ και συνεπώς ελαττώνεται επίσης λανθασμένα με ρυθμό $\frac{1}{r}$.

Εδώ λοιπόν και για χάρη των άλλων «σημαντικών» της ζωγραφιάς του πεδίου με δυναμικές γραμμές «θυσιάζουμε» ουσιαστικά το νόμο του αντίστροφου τετραγώνου του Coulomb.

Θέλω να πω με τα παραπάνω ότι κάποιες φορές στο επίπεδο μεταφέρουμε χαρακτηριστικά των εικόνων του χώρου, <u>ακόμη κι αν αυτό δεν είναι επιτρεπτό μαθηματικά.</u> Ο λόγος είναι ότι οι δυναμικές γραμμές «ορίστηκαν» μόνο και μόνο για να αποδώσουν γραφικά στο επίπεδο κάποια χαρακτηριστικά του τρισδιάστατου πεδίου. Με δεδομένο μάλιστα ότι η δυναμική γραμμή δεν είναι μια αυστηρά θεμελιωμένη έννοια, μπορούμε να κάνουμε κάποιες «εκπτώσεις» για χατίρι της ζωγραφιάς μας.

6) ***Όσα είπαμε αφορούν αναλογία αριθμού δυναμικών γραμμών***. Αυτό σημαίνει ότι δεν εξασφαλίσαμε ότι ξέρουμε και την κατανομή τους, η οποία προφανώς είναι το αμέσως επόμενο μεγάλο πρόβλημά μας, πιο μεγάλο από τον υπολογισμό του της αναλογίας των δυναμικών γραμμών.

Η κατανομή των δυναμικών γραμμών γύρω από τα φορτία θα γίνει ανατρέχοντας στις τιμές της έντασης και κάνοντας μια εκτίμηση το πόσο πυκνά θα τις ζωγραφίσουμε στα διάφορα σημεία. Επιζητούμε δηλαδή κάτι σα μέσο όρο. Ή αλλιώς επιζητούμε την αναλογία-κατανομή των δυναμικών γραμμών, ανεξάρτητα αν η αναλογία βγήκε από ομογενή κατανομή των ιχνών των δυναμικών γραμμών πάνω στην επιφάνεια που ζωγραφίζουμε *(πράμα που πολύ μας βολεύει)* ή όχι.

7) Όσα είπαμε έχουν ***απλή εφαρμογή*** σε πεδία που μπορούν, με κάποιες ανοχές, να σχεδιαστούν στο επίπεδο. Αλλιώς τα πράματα και πιο δύσκολα γίνονται απαιτώντας περισσότερη ανάλυση και περισσότερη και πιο δύσκολη μαθηματική επεξεργασία, που δεν ξέρω αν έχει αξία στην εκπαίδευση μαθητών Λυκείου. Αν έχει τότε νομίζω ότι αυτό πρέπει να γίνει με προχωρημένα προγράμματα προσομοίωσης πεδίου. Σε πεδία με έντονη μεταβολή από σημείο σε σημείο και χωρίς καμιά συμμετρία τι να σχεδιάσω και σε πιο επίπεδο. Χώρια που πρέπει να βρω αν υπάρχουν και αν μπορώ να βρω δυναμικές γραμμές.

Ας μην ξεχνάμε ότι ο σκοπός μας δεν είναι να καθιερώσουμε έναν τρίτο μαθηματικά αυστηρό τρόπο περιγραφής του ηλεκτρικού πεδίου (οι άλλοι δύο είναι ένταση και δυναμικό), αλλά να το σχεδιάσουμε για παιδαγωγικούς λόγους.

8) Είναι προφανές ότι στο μαγνητικό πεδίο τα «πράγματα» πρέπει να προσαρμοστούν και απαιτούν μεγαλύτερη προσοχή, γιατί οι δυναμικές γραμμές είναι γραμμές κλειστές.

<u>Τελικά τι ζωγραφίζουμε στο επίπεδο;</u>

Επιγραμματικά ας επισημάνουμε τούτο:

Δεν είναι πάντα εύκολο να πούμε αν μπορούμε να βρούμε και να ζωγραφίσουμε δυναμικές γραμμές στο χώρο ή στο επίπεδο και μάλιστα πεδίων που οφείλονται σε παράξενες κατανομές φορτίων ή πεδίων που μεταβάλλονται έντονα και παράξενα από σημείο σε σημείο του χώρου.

Δεν ξέρω βέβαια αν έχει καμιά αξία μια τέτοια απεικόνιση, δηλαδή η απεικόνιση ενός τρισδιάστατου πεδίου σε χαρτί, όταν μπορεί από επίπεδο σε επίπεδο απεικόνισης όλα να αλλάζουν. Και βέβαια δεν είναι πάντα εύκολη η λύση διαφορικών εξισώσεων όπως της (19) που θα βρούμε παρακάτω. Σκεφτείτε ότι η σχέση (19) αφορά σημεία του επιπέδου. Άντε μετά να πάμε να δούμε τι συμβαίνει στο χώρο, όπου πιο δύσκολα συστήματα διαφορικών εξισώσεων θα κάνουν την εμφάνισή τους.

Ίσως όλα αυτά να έχουν αξία με τις τρισδιάστατες απεικονίσεις που πιθανώς θα μας δώσουν βαριά προγράμματα προσομοίωσης, αλλά σίγουρα δεν είναι για τις περιορισμένες ζωγραφικές μας ικανότητες.

Αναγκαστικά λοιπόν περιοριζόμαστε σε ″ήρεμες″ κατανομές και κυρίως σε αυτές που διαθέτουν κατάλληλη συμμετρία περιστροφής, όπως αυτή που επισημάναμε παραπάνω και η οποία καλύπτει τις ανάγκες της Β΄ Λυκείου.

Η συμμετρία περιστροφής γύρω από άξονα xx΄ έχει για μας αξία, γιατί όποιο επίπεδο και να επιλέξουμε από εκείνα που διέρχονται από τον άξονα αυτόν η εικόνα θα είναι ίδια. Αν καθώς περιστρεφόταν το επίπεδο γύρω από τον xx΄ άλλαζαν όλα, τι αξία θα είχε η επιλογή ενός από τα άπειρα διαφορετικά επίπεδα που θα υπήρχαν για να αποδώσουμε δυναμικές γραμμές;

Εδώ πρέπει να τονισθεί κάτι πάρα πολύ σημαντικό για τις δυναμικές γραμμές:

Την έννοια της δυναμικής γραμμής την εισήγαγε ο Faraday με δύο συνθήκες. Όμως οι δύο αυτές συνθήκες δεν προβλέπουν σχεδίαση δυναμικών γραμμών σε επίπεδο.

Αυτό το αντιφατικό «πράγμα» δικαιολογείται πλήρως αν ισχύει η πληροφορία ότι ο Faraday δεν ήξερε καλά μαθηματικά. Δηλαδή, ενώ εισήγαγε δύο συνθήκες για να δικαιολογήσει τη σχεδίαση δυναμικών γραμμών στο επίπεδο, οι συνθήκες του Faraday δεν προβλέπουν αυτή τη δυνατότητα παρά μόνο με την χαλαρότητα που έχουμε ήδη επισημάνει.

Ας το ξαναδούμε...

Έγραφε κάποτε ο Faraday, πάνω κάτω τα εξής:

″...οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζονται έτσι που ο αριθμός τους ***σε κάθε μονάδα εμβαδού σε μια κάθετη διατομή****, να είναι ανάλογος του μέτρου της έντασης. Έτσι εκεί που οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνές το μέτρο της έντασης είναι μεγάλο, ενώ εκεί που είναι αραιές, το μέτρο της έντασης είναι μικρό. ″*

Έλεγε δηλαδή ότι...

...για να σχεδιάσεις μια δυναμική γραμμή, πρέπει να την κάνεις να περνάει κάθετα από κάποια *(στοιχειώδη ίσως)* επιφάνεια.

Όμως πώς να σχεδιάσεις στο επίπεδο δυναμικές γραμμές, όταν τα επίπεδα δεν διαθέτουν στοιχειώδεις επιφάνειες κάθετες σε αυτά μέσα από τις οποίες θα περάσουν κάθετα οι δυναμικές γραμμές;

Συμπέρασμα:

Η δυναμική γραμμή είναι έννοια προορισμένη για το χώρο. Η σχεδίαση στο επίπεδο θα γίνει με τίμημα, έστω κι αν εμείς αποζητήσουμε το καλύτερο.

Ο Faraday φαίνεται να μη είχε συνειδητοποιήσει την κατάσταση. Και η υποψία αυτή γίνεται βεβαιότητα αν σκεφτούμε ότι ο μεγάλος αυτός πειραματιστής Φυσικός ήθελε να κάνει τις δυναμικές γραμμές φυσικό μέγεθος!

Πώς ζωγραφίζουμε δυναμικές γραμμές στο επίπεδο όταν έχουμε συμμετρία περιστροφής στο χώρο;

Έστω το ηλεκτρικό πεδίο που σχηματίζεται γύρω από δύο σημειακά φορτία $q_1>0$ και $q_2<0$ με $|q_1| = 2|q_2|$. Αν xx΄ η ευθεία που συνδέει τα δύο φορτία το πεδίο που σχηματίζεται έχει συμμετρία στην περιστροφή γύρω από την ευθεία xx΄.

Σε σύστημα αξόνων που στην αρχή του βρίσκεται το q_1, επιλέγουμε να εργαστούμε με σφαιρικές συντεταγμένες «κατάλληλου» προσανατολισμού, ώστε η γωνία $\varphi \in [0,2\pi]$ να βρίσκεται στο επίπεδο που θα επιλέξουμε να ζωγραφίσουμε τις δυναμικές γραμμές και η γωνία $\vartheta \in [0,\pi]$ να γυρνάει αυτό το επίπεδο στις άλλες συμμετρικές του θέσεις.

Περικλείοντας το q_1 σε σφαίρα ακτίνας r θα ισχύει η σχέση (5)

$$\oint_S \vec{E}(x,y,z)\cdot d\vec{a} = kN' \qquad (5)$$

και συνεπώς

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{\mathrm{E}}(r,\vartheta,\phi)\cdot\hat{r}\ r^2\eta\mu\vartheta\ d\vartheta\ d\phi = k\ \mathrm{N}' \qquad (10)$$

όπου $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της ακτίνας r και με φορά προς τα έξω της σφαίρας.

Καλύπτουμε τη σφαιρική επιφάνεια με λωρίδες εμβαδού $2\pi r^2 \eta\mu\vartheta\, d\vartheta$ η κάθε μια.

(Για να δείτε ότι μπορούμε να το κάνουμε αυτό και ότι είναι σωστό, ολοκληρώστε την παραπάνω σχέση μέσα στα όρια του $\vartheta \in [0,\pi]$ και θα βγάλετε το εμβαδόν της σφαίρας).

Επιλέγουμε ως επίπεδο για να ζωγραφίσουμε δυναμικές γραμμές το ... χαρτί μας(!!!), το επίπεδο εκείνο δηλαδή που περνά από τον άξονα xx΄ και είναι ″οριζόντιο″. Η σφαίρα που περιβάλλει το q_1, ″κόβει″ το χαρτί μας δημιουργώντας ένα μέγιστο ***κύκλο***.

Εκεί, το $\theta=\pi/2$ *rad* και η λωρίδα της επιφάνειας της σφαίρας που περιέχει αυτόν το μέγιστο ***κύκλο*** έχει εμβαδόν $2\pi\, r^2 d\vartheta$.

Συνεπώς ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν τη λωρίδα της σφαίρας την κάθετη στο χαρτί μας είναι ανάλογος του

$$\int_0^{2\pi} \vec{\mathrm{E}}(r,\vartheta,\phi)\cdot\hat{r}\ r^2\eta\mu\vartheta\ d\vartheta\ d\phi$$

<u>και αφορά τη λωρίδα η οποία είναι κάθετη στο χαρτί μας, έχοντας απειροστικό «γωνιακό ύψος» $d\vartheta$ πάνω από το χαρτί μας και περιβάλλει το φορτίο q_1.</u>

Το ίδιο κάνω και με το q_2, με σφαίρα ίδιας ακτίνας. Οι αντίστοιχες λωρίδες θα έχουν ίδια εμβαδά, οπότε η κατανομή των δυναμικών γραμμών σε κάθε λωρίδα θα γίνει βάσει της έντασης.

Αν για κάθε ζευγάρι αντίστοιχων λωρίδων δεχτώ ως αναλογία δυναμικών γραμμών την αναλογία της σχέσης (9) που ισχύει για το χώρο γύρω από τα q_1 και q_2, αυτόματα η αναλογία δυναμικών γραμμών στο επίπεδό μου διατηρείται ίδια με εκείνη στο χώρο.

Μπορώ να το κάνω αυτό; Ναι, γιατί όπως ήδη είπαμε η κατανομή των δυναμικών γραμμών σε κάθε λωρίδα θα γίνει κατόπιν βάσει της έντασης. Το ίδιο κάνουμε και αν πρέπει να κατανείμουμε δυναμικές γραμμές σε δυο λωρίδες της ίδιας σφαίρας. Διατηρώντας το $d\vartheta$ ίδιο στις αντίστοιχες λωρίδες, επιχειρούμε τη διαφοροποίηση του αριθμού των γραμμών με την ένταση. Το ίδιο κάνω και κατά την κατανομή των δυναμικών γραμμών στο χώρο. Φαίνεται εξάλλου και από την ένταση που περιέχει η παραπάνω σχέση (10).

Η αναλογία ανάμεσα στις δυναμικές γραμμές που έχουν οι δύο ίσες λωρίδες οι οποίες κόβουν κάθετα το χαρτί μας, θα σχεδιαστεί στο χαρτί έστω και αν κάποιες δυναμικές δε θα ανήκουν στο χαρτί μας.

Δε γίνεται αλλιώς μιας και η έννοια της δυναμικής γραμμής θέλει τον χώρο.

Συνεπώς το να σχεδιάζουμε στο χαρτί την αναλογία δυναμικών γραμμών του χώρου, στα συμμετρικά εκ περιστροφής πεδία του Λυκείου είναι ανεκτό και ίσως ό,τι το καλύτερο. Έχει αρκετή συνέπεια και μαθηματική και παιδαγωγική και αποδίδει αυτό για το οποίο φτιάχτηκαν οι δυναμικές γραμμές. Να αποδώσουν αναλογίες και σημαντικά χαρακτηριστικά του πεδίου, όπως την αναλογία και τη συμμετρία στο χώρο.

Ας έρθουμε τώρα σε μια βασική ερώτηση.

Πόσες δυναμικές γραμμές ζωγραφίζουμε γύρω από ένα φορτίο;

Αν είναι μόνο του το φορτίο, ζωγραφίζουμε όσες θέλουμε, αρκεί η εικόνα να ικανοποιεί και εμάς και αυτούς που θα διδάξουμε.

Αν τα φορτία είναι περισσότερα, τότε για να είμαστε σωστοί ζωγραφίζουμε όσες θέλουμε αλλά πρέπει να τηρήσουμε τις αναλογίες όπως αυτές υπαγορεύονται από τα φορτία *(σχέση 9)*.

Μερικά ακόμα «μαθηματικά» στοιχεία για τις δυναμικές γραμμές

Ας αναλύσουμε το θέμα στο επίπεδο, ώστε να συνειδητοποιήσουμε ακόμη μερικά προβλήματα που θα μας δημιουργήσει μια αυστηρή μαθηματική εισαγωγή των δυναμικών γραμμών.

Έστω ότι έχουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο που παρουσιάζει συμμετρία τέτοια ώστε το ενδιαφέρον του να εντοπίζεται στις δύο μόνο διαστάσεις. Η ένταση του πεδίου είναι

$$\vec{E}(x,y) = E_1(x,y)\cdot\vec{i} + E_2(x,y)\cdot\vec{j} \tag{11}$$

ενώ το μέτρο της έντασης

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \tag{12}$$

Μια τυχαία γραμμή του επιπέδου στο οποίο εξετάζουμε το πεδίο παριστάνεται από τη συνάρτηση

$$\vec{r}(u) = x(u)\cdot\vec{i} + y(u)\cdot\vec{j} \tag{13}$$

Αν ds το στοιχειώδες μήκος της γραμμής τότε το διάνυσμα

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{ds}\cdot\vec{j} \tag{14}$$

είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της γραμμής $\vec{r}(u)$.

Για να αποτελεί η $\vec{r}(u)$ δυναμική γραμμή, πρέπει σε κάθε σημείο της Μ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που υπάρχει στο Μ, να είναι εφαπτόμενη της γραμμής και να έχει με τη γραμμή την ίδια κατεύθυνση.

Στα σημεία της γραμμής συνεπώς, τα διανύσματα $\vec{E}(x,y)$ και $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ πρέπει να είναι ομόρροπα.

Όμως το $\frac{d\vec{r}}{ds}$ είναι μοναδιαίο και συνεπώς θα πρέπει να ισχύει

$$\vec{E}(x,y) = \left(\sqrt{E_1^2 + E_2^2}\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{15}$$

Λόγω των (11) και (14) η (15) γίνεται

$$E_1(x,y)\cdot\vec{i} + E_2(x,y)\cdot\vec{j} = \left(\sqrt{E_1^2 + E_2^2}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{ds}\cdot\vec{j}\right) \tag{16}$$

Άρα

$$E_1(x,y) = \left(\sqrt{E_1^2 + E_2^2}\right)\cdot\frac{dx}{ds} \tag{17}$$

$$E_2(x,y) = \left(\sqrt{E_1^2 + E_2^2}\right)\cdot\frac{dy}{ds} \tag{18}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (17) και (18) προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_2(x,y)}{E_1(x,y)} \tag{19}$$

Η διαφορική εξίσωση (19) δεν είναι πάντα εύκολο να λυθεί και άρα δεν είναι πάντα εύκολο να πούμε αν υπάρχουν, ποιες είναι και πώς θα ζωγραφίσουμε τις δυναμικές γραμμές.

Η καταπληκτική φιλοσοφία των δυναμικών γραμμών

Οι δυναμικές γραμμές δεν είναι φυσικό μέγεθος, ούτε κάποιο δυνατό μαθηματικό εργαλείο, αλλά παρόλα αυτά αισθητοποιούν με καταπληκτικό τρόπο μια φυσική οντότητα που λέγεται πεδίο.

6ο ερώτημα

Γιατί οι δυναμικές γραμμές συνδέονται με την ένταση του πεδίου; Δηλαδή μόνο όπου ορίζεται η ένταση υπάρχουν δυναμικές γραμμές;

Απάντηση:

Το βαρυτικό, το ηλεκτρικό, το μαγνητικό είναι παραδείγματα πεδίων στα οποία έχει νόημα η έννοια της έντασης και συνεπώς έχουν έννοια οι δυναμικές γραμμές.
Ο λόγος που έχει μεγάλη αξία η ένταση είναι ότι είναι ένα φυσικό μέγεθος το οποίο δεν εξαρτάται από το υπόθεμα που θα φέρουμε στο πεδίο, αλλά από αυτό καθ΄ εαυτό το πεδίο. Αυτό έχει μια βαθύτερη σημασία γιατί δίνει στο πεδίο μια ανεξάρτητη φυσική παρουσία. Τα τρία πεδία που ανέφερα είναι ανεξάρτητες φυσικές παρουσίες.

Γίνομαι πιο σαφής:

Κατάλληλο υπόθεμα για ένα πεδίο βαρύτητας είναι η μάζα, γιατί η μάζα **και** δημιουργεί πεδίο βαρύτητας **και** αντιλαμβάνεται το πεδίο βαρύτητας.

Η διαίρεση δύναμης βαρύτητας $\vec{F}_g$ με τη μάζα-υπόθεμα m

- κάνει το πηλίκο $\dfrac{\vec{F}_g}{m}$ ανεξάρτητο του υποθέματος m που θα βρεθεί μέσα στο βαρυτικό πεδίο
- κάνει το πηλίκο $\dfrac{\vec{F}_g}{m}$ φυσικό μέγεθος. Ορίζεται δηλαδή η ένταση $\vec{g}$, η οποία είναι ένα διανυσματικό μέγεθος ικανό να περιγράψει το βαρυτικό πεδίο συναρτήσει των πηγών του και όχι βάσει των υποθεμάτων (μαζών) που πιθανώς να βρεθούνε εντός του
- μετουσιώνει το πηλίκο $\dfrac{\vec{F}_g}{m}$ σε ένταση $\vec{g}$ χαρίζοντας στο βαρυτικό πεδίο ανεξάρτητη παρουσία, ανεξάρτητη φυσική οντότητα. Ή, για να μιλήσω πιο ελεύθερα, περιγράφει το πεδίο ως άλλο, ως καινούριο πλάσμα της Φύσης, ανεξάρτητο από τις πηγές του και τα υποθέματά του

Το ίδιο συμβαίνει και στο ηλεκτρικό πεδίο.

Κατάλληλο υπόθεμα για ένα ηλεκτρικό πεδίο είναι το φορτίο, γιατί το φορτίο **και** δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο **και** αντιλαμβάνεται το ηλεκτρικό πεδίο.
Η διαίρεση ηλεκτρικής δύναμης $\vec{F}_{\eta\lambda}$ με το φορτίο-υπόθεμα q

- κάνει το πηλίκο $\dfrac{\vec{F}_{\eta\lambda}}{q}$ ανεξάρτητο του υποθέματος q που θα βρεθεί μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο
- κάνει το πηλίκο $\dfrac{\vec{F}_{\eta\lambda}}{q}$ φυσικό μέγεθος. Ορίζεται δηλαδή η ένταση $\vec{E}$, η οποία είναι ένα διανυσματικό μέγεθος ικανό να περιγράψει το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει των πηγών του και όχι βάσει των υποθεμάτων (φορτίων) που πιθανώς να βρεθούνε εντός του
- μετουσιώνει το πηλίκο $\dfrac{\vec{F}_{\eta\lambda}}{q}$ σε ένταση $\vec{E}$ χαρίζοντας στο ηλεκτρικό πεδίο ανεξάρτητη παρουσία, ανεξάρτητη φυσική οντότητα. Ή, για να μιλήσω πιο ελεύθερα, περιγράφει το πεδίο ως άλλο, ως καινούριο πλάσμα της Φύσης, ανεξάρτητο από τις πηγές του και τα υποθέματά του.

Όπως πολλές φορές έχουμε πει σε αυτό το κείμενο, ο λόγος του «ορισμού» των δυναμικών γραμμών, δηλαδή ο τελικός τους σκοπός, είναι να δώσουμε μέσω αυτών μια αίσθηση του πεδίου.
Αυτό έχει τεράστια αξία και για τη δικιά μας τη συνείδηση και για τη συνείδηση των παιδιών στα οποία θα διδάξουμε, όχι γιατί δίνει μια ζωγραφιά, αλλά κυρίως γιατί καθιερώνει μέσα μας το πεδίο ως ανεξάρτητη φυσική οντότητα που μπορεί και ζωγραφίζεται όπως ζωγραφίζεται ένα σώμα (π.χ. ένα δέντρο ή ένα κινητό).

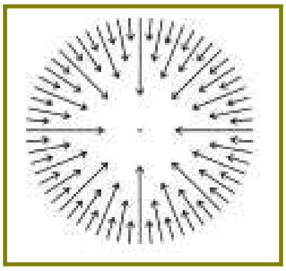
Οι δυναμικές γραμμές λοιπόν είναι συνδεδεμένες με την ένταση του πεδίου, η οποία ως εφαπτόμενή τους χαρακτηρίζει το πεδίο και το αναδεικνύει ως ανεξάρτητη υπόσταση.

Το λογικό-φιλοσοφικό σχήμα δηλαδή που διαφοροποιεί τις δυναμικές γραμμές από άλλου είδους γραμμές, όπως π.χ. τις ρευματικές γραμμές στα ρευστά, είναι

> *Το σ είναι υπόθεμα πεδίου από το οποίο δέχεται δύναμη $\vec{F}$ →*
>
> *το πηλίκο $\dfrac{\vec{F}}{\sigma}$ ανεξάρτητο του υποθέματος σ και λέγεται ένταση του πεδίου →*
>
> *οι δυναμικές γραμμές συνδέονται με την ένταση μέσω των τριών ιδιοτήτων της σελίδας 2 →*
>
> *μέσω της έντασης και τελικά των τριών ιδιοτήτων αποδίδουν στο πεδίο ανεξάρτητη φυσική οντότητα (φιλοσοφία των δυναμικών γραμμών).*

Άρα οι δυναμικές γραμμές έχουν νόημα για τα πεδία για τα οποία ορίζεται η ένταση την οποία φιλοδοξώντας να αποδώσουν σε κάποιο βαθμό και ως προς την φορά και ως προς τη διεύθυνση και ως προς το μέτρο, φιλοδοξούν να καθιερώσουν το πεδίο ως φυσική πραγματικότητα.

7ο ερώτημα



Θα μπορούσαμε σε ένα πεδίο δυνάμεων της μορφής $\vec{F} = -D\vec{r}$, να δώσουμε ως δυναμικές γραμμές τις εφαπτόμενες των δυνάμεων όπως αυτές απεικονίζονται στο δισδιάστατο χώρο της διπλανής εικόνας;

<u>Απάντηση:</u>

Προσπαθώ να μη γελάσω με όσα ρωτήθηκαν και κυρίως με τη διπλανή απόλυτα εξωφρενική εικόνα ... Ας σταθώ σοβαρός όταν βλέπω γελοιότητες!

Η Μηχανική <u>αδιαφορεί</u> «ποιος» παράγει ή «πώς» παράγεται η κεντρική δύναμη $\vec{F} = -D\vec{r}$ της τρισδιάστατης απλής αρμονικής ταλάντωσης στην οποία αναφέρεται η ερώτηση.

Και <u>αδιαφορεί</u> διότι

- η δύναμη $\vec{F} = -D\vec{r}$ μπορεί να είναι προϊόν συνδυασμού πολλών συνθηκών ή πολλών πεδίων
- δεν υπάρχει κάποιο ξεχωριστό υπόθεμα για τη δύναμη $\vec{F} = -D\vec{r}$ όπως συμβαίνει π.χ. με τη μάζα που είναι υπόθεμα της βαρύτητας.

Δεν υπάρχει κάτι συγκεκριμένο που να παράγει το πεδίο $\vec{F} = -D\vec{r}$, δεν υπάρχει υπόθεμα για το πεδίο $\vec{F} = -D\vec{r}$ και συνεπώς σε ένα πεδίο $\vec{F} = -D\vec{r}$ δεν υπάρχει δυνατότητα να ορίσουμε ένα διάνυσμα που να το ονομάσουμε ένταση και που να είναι ανεξάρτητο του υποθέματος που θα φέρουμε.

<u>Αφού λοιπόν δεν υπάρχει ένταση για το $\vec{F} = -D\vec{r}$, δεν έχουμε κανένα δικαίωμα να μιλάμε για δυναμικές γραμμές αυτού του πεδίου.</u>

Η μάζα m προφανώς δεν είναι υπόθεμα για το πεδίο $\vec{F} = -D\vec{r}$. Αυτό φαίνεται καθαρά από το ότι αν πάμε στο πηλίκο $\dfrac{\vec{F}}{m}$ προκύπτει μια επιτάχυνση $-\dfrac{D\vec{r}}{m}$ που δεν είναι γενικά ανεξάρτητη από την m και συνεπώς δεν προκύπτει κάτι που να είναι χρήσιμο ως ένταση του πεδίου $\vec{F} = -D\vec{r}$

Δε μπορεί τελικά να οριστεί ένταση για το πεδίο $\vec{F} = -D\vec{r}$ όπου πιθανώς να πραγματοποιείται μια α.α.τ. Κι αν δεν οριστεί ένταση δε θα οριστούν δυναμικές γραμμές

Τελικά επειδή οι δυναμικές γραμμές δεν έχουν άμεση σχέση με τις δυνάμεις, αλλά μόνο με τις εντάσεις, και επειδή ένταση στο πεδίο $\vec{F} = -D\vec{r}$ δε μπορεί να οριστεί οι έννοια της δυναμικής γραμμής στο πεδίο $\vec{F} = -D\vec{r}$ δεν υφίσταται.

Όσον αφορά το σχήμα είναι το λιγότερο απαράδεκτο,

- γιατί δεν έχει ούτε τη στοιχειώδη συλλογιστική να δώσει στα διανύσματα που βρίσκονται στην ίδια απόσταση το ίδιο μέτρο,
- γιατί σταματά τις δυναμικές γραμμές αναίτια και απότομα χωρίς να εξηγεί το λόγο,
- γιατί στη θέση ισορροπίας (στο κέντρο δηλαδή) οι δυνάμεις έπρεπε να είναι μηδέν, ενώ η πυκνότητα των «γραμμών» του σχήματος δείχνει ότι εκεί θα γίνει χάος,
- γιατί .... γιατί....
- γιατί τελικά πρόκειται για μια σχεδιαστική μπαρούφα!

8ο ερώτημα

Θα μπορούσαμε να μεταφέρουμε την έννοια της δυναμικής γραμμής σε οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο;

Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για δυναμικές γραμμές σε ένα πεδίο ταχυτήτων στα ρευστά;

Απάντηση:

Έχουμε δικαίωμα να ζωγραφίσουμε πεδία ταχυτήτων, δυνάμεων, επιταχύνσεων κ.λ.π. και να αναζητήσουμε ολοκληρωτικές καμπύλες αυτών των πεδίων.

Όμως δεν έχουμε δικαίωμα να ονομάσουμε αυτές τις καμπύλες δυναμικές γραμμές, γιατί, ενώ πιθανώς να έχουν ή να μην έχουν τις ιδιότητες των δυναμικών γραμμών, σίγουρα δε θα κουβαλούν τη φιλοσοφία τους.

Ένα πεδίο ταχυτήτων δεν είναι φυσική πραγματικότητα όπως π.χ. ένα πεδίο ηλεκτρικών εντάσεων και δεν είναι συνδεδεμένο με δυνάμεις πάνω σε κάποιο υπόθεμα για να δικαιολογεί τον όρο δυναμικές γραμμές.

Το να λέμε δυναμικές γραμμές ταχυτήτων είναι σοφό; Γιατί δυναμικές γραμμές κάποιου μεγέθους που δεν έχει προφανή σύνδεση με τις δυνάμεις;

9ο ερώτημα

Θα μπορούσαμε να μεταφέρουμε την έννοια της δυναμικής γραμμής σε οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο μέσω των ολοκληρωτικών καμπυλών;

Απάντηση:

Εννοείται όχι!!!!

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι κάτι μαθηματικό και συνεπώς κάτι όχι απλά αυστηρά ορισμένο, αλλά τις πιο πολλές φορές χωρίς καμιά μα καμιά φυσική σημασία. Μπορώ να ορίσω οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο δικιάς μου έμπνευσης θέλω και μετά να αναζητήσω ολοκληρωτικές καμπύλες στο δικιάς μου εφεύρεσης διανυσματικό πεδίο.

Για ποιό λόγο όμως θα πρέπει αυτές τις μαθηματικές γραμμές να τις πω δυναμικές γραμμές όταν

- κανένα μα κανένα φυσικό μέγεθος δε θα φιλοδοξούν να υλοποιήσουν, αλλά θα είναι σκέτα μαθηματικά τερτίπια
- τις πιο πολλές φορές κανένα μα κανένα φυσικό μέγεθος δε θα είναι εφαπτόμενο επάνω τους
- δε θα είναι κάποια φυσική πραγματικότητα (πεδίο Φυσικής όπως το ηλεκτρικό), αλλά πιθανώς (μαθηματικό) πεδίο κάποιου φυσικού μεγέθους

10ο ερώτημα

Ωραία όλα αυτά, αλλά αν επιμείνουμε να κάνουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες δυναμικές γραμμές από πού θα προκύψει το πρόβλημα και συνεπώς η τελική απαγόρευση;

Απάντηση:

α) Οι ολοκληρωτικές καμπύλες δε θα μπορέσουν ποτέ να αποδώσουν καμιά φυσική πραγματικότητα όπως οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου, γιατί **γενικά** ποτέ δε θα καταφέρουν να γίνουν ένταση διανυσματικού πεδίου κάτι που προϋποθέτει υπόθεμα και συνεπώς χρήση Φυσικής Δομικών Στοιχείων όπως η μάζα και το φορτίο.
Οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι μαθηματικές καμπύλες σε (μαθηματικά) διανυσματικά πεδία και συνεπώς δεν προϋποθέτουν υποθέματα και άρα δεν προϋποθέτουν ένταση για το διανυσματικό πεδίο στο οποίο υπάρχουν ως εφαπτόμενες.

β) Το να επιχειρήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες ως δυναμικές γραμμές, αυτό θα σημάνει αμέσως ότι πρέπει να τις «ενισχύσουμε» με την έννοια της πυκνότητας γραμμών, η οποία πυκνότητα θα πρέπει να δίνει και κάτι.

Όμως τί δίνει η πυκνότητα των ολοκληρωτικών καμπυλών στα Μαθηματικά;
Απάντηση:
Απολύτως τίποτε γιατί η πυκνότητα γραμμών δεν υπάρχει ούτε καν ως έννοια στα Μαθηματικά. Αν παρόλα αυτά επιχειρήσουμε να τροφοδοτήσουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες με πυκνότητα, θα πρέπει η έννοια της πυκνότητας των ολοκληρωτικών καμπυλών να είναι αντίστοιχη της πυκνότητας των δυναμικών γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου, η οποία δίνει κάποιο στοιχείο φυσικού μεγέθους (στο ηλεκτρικό πεδίο δίνει το μέτρο της έντασης).

Με άλλα λόγια, η πυκνότητα γραμμών ενώ είναι απαραίτητο στοιχείο για τον ορισμό των δυναμικών γραμμών δεν είναι μια έννοια που έχει μαθηματική αυστηρότητα (αλλά μόνο ζωγραφική καλλιτεχνία) και συνεπώς καταργεί αυτομάτως την αυστηρότητα και από την έννοια της δυναμικής γραμμής.

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι αυστηρά ορισμένες. Η πυκνότητα γραμμών όμως, έννοια απαραίτητη για τις δυναμικές γραμμές, δεν είναι έννοια μαθηματική.

Συμπέρασμα:

Οι δυναμικές γραμμές είναι κάτι παραπάνω από τις ολοκληρωτικές καμπύλες. Πιστοποιούν εντάσεις και φυσικές υπάρξεις (πεδία Φυσικής όπως το βαρυτικό και το ηλεκτρικό).

Οι δυναμικές γραμμές είναι τόσο παραπάνω από τις ολοκληρωτικές καμπύλες, ώστε να θυσιάζουν τη μαθηματική αυστηρότητα των ολοκληρωτικών καμπυλών για να καλύψουν τις ζωγραφικές ανάγκες μιας φυσικής πραγματικότητας και όχι μιας μαθηματικής θέσης.
Οι δυναμικές γραμμές μας χρειάζονται για να ζωγραφίσουμε ένα πεδίο ως πραγματικότητα ίδια με εκείνη με την οποία ζωγραφίζουμε ένα σώμα (ένα κινητό).

Τελικά οι δυναμικές γραμμές είναι **και** μια προσωπική μας απόδοση και μια επιλογή στάσης απέναντι σε ένα πεδίο.

Πήλιο, Κυριακή 18 Οκτωβρίου 2009

Θρασύβουλος Μαχαίρας