

## Η άσκηση μιας ιστορίας

**Η άσκηση** (Σχολικό βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου Άσκηση 14 / Σελίδα 158)

«Ένα όχημα έχει λάστιχα διαμέτρου 0,8 m. Βρείτε την ταχύτητα και την κεντρομόλο επιτάχυνση ενός σημείου στο πέλμα του ελαστικού όταν το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 35 m/sec»

### Η ιστορία

Πριν ενάμισι χρόνο περίπου ένας φίλος φυσικός, ο Γιώργος, με πήρε τηλέφωνο.

- Ρε Θρασύβουλε πως διδάσκεις την άσκηση 14 της σελίδας 158 του σχολικού βιβλίου Φυσικής Α΄ Λυκείου;

Ανοίγω το σχολικό, βλέπω την άσκηση και του λέω

- Γιώργο, αυτή την άσκηση ούτε ποτέ την έβαλα στα παιδιά, ούτε ποτέ τη δίδαξα και ούτε πρόκειται να τη διδάξω ποτέ, γιατί απλούστατα δε μπορώ να τη λύσω.

Μου ζητά να βρω την ταχύτητα και την κεντρομόλο ενός σημείου στο πέλμα του τροχού! Δηλαδή μου ζητά να βρω διανύσματα που συνεχώς αλλάζουν στο χώρο!!!!

Πώς θα βρω εγώ τις αναλυτικές εκφράσεις χωρομεταβλητών διανυσμάτων αν δεν είμαι προετοιμασμένος για «βαριές» καταστάσεις;

Πρέπει να ασχοληθώ με την άσκηση τουλάχιστον μια μέρα και να κατεβάσω διάφορα πανεπιστημιακά βιβλία διανυσματικής ανάλυσης για να τη λύσω....

Κατά συνέπεια τα παιδιά της Α΄ Λυκείου ή δε θα τη λύσουν ποτέ ή θα τη λύσουν σίγουρα λανθασμένα και εγώ μετά θα πρέπει να τους απορρίψω τη λύση. Αλλά το χειρότερο θα είναι ότι δε θα είναι σε θέση να καταλάβουν γιατί η λύση τους είναι λάθος, ούτε να καταλάβουν τη λύση που θα τους δώσω.... Γιατί λοιπόν να βάλω σε παιδιά Λυκείου αυτή την απαράδεκτη άσκηση;

- Αν δεν πάμε σε όλη την τροχιά που ακολουθεί το κάθε σημείο αλλά περιοριστούμε μόνο εκεί που πατάει ο τροχός, η κεντρομόλος νομίζω είναι μηδέν και βέβαια έχω τα επιχειρήματά μου, αλλά πολύς κόσμος, μεταξύ αυτών και το σχολικό, την υπολογίζει διάφορη του μηδενός. Μπορείς να μου πεις, έστω πρόχειρα, πόσο πιστεύεις ότι κάνει η κεντρομόλος εκεί κάτω που πατάει ο τροχός;

- **Η κεντρομόλος εκεί κάτω που πατάει ο τροχός είναι μηδέν**, του λέω, αλλά το επιχειρήματά μου είναι περισσότερο περιγραφικό, παρά μαθηματικά αναλυτικό.

Το τυχαίο υλικό σημείο Μ του τροχού διαγράφει κυκλοειδές. Όταν λοιπόν το σημείο Μ βρεθεί στο έδαφος η τροχιά του, το κυκλοειδές του δηλαδή, θα παρουσιάζει «κόγχη» επειδή ο τροχός θεωρούμε ότι δεν ολισθαίνει. Επομένως η ακτίνα καμπυλότητας εκείνη τη στιγμή δεν έχει κανένα απολύτως νόημα, εκτός αν είναι μηδέν. Αφού λοιπόν η ακτίνα είναι μηδέν δε μπορεί να υπάρχει κύκλος προς το κέντρο του οποίου θα κατευθύνεται η κεντρομόλος.

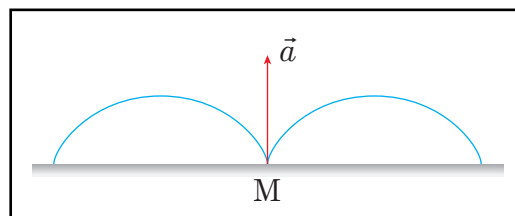
Άρα ένα υλικό σημείο Μ του πέλματος του τροχού όταν βρεθεί στο έδαφος δεν έχει κεντρομόλος συνιστώσα επιτάχυνσης και συνεπώς όλη η επιτάχυνση  $\vec{a}$  του σημείου Μ είναι επιτρόχιος.

Η επιτάχυνση  $\vec{a}$  του υλικού σημείου M όταν αυτό βρεθεί στο έδαφος είναι «αποκλειστικά» επιτρόχιος και συνεπώς εφαπτόμενη στο κυκλοειδές, στην τροχιά του M δηλαδή.

Για να μην υπάρχει λοιπόν ασυνέχεια, πρέπει αυτή η εφαπτομενική επιτάχυνση του M όταν αυτό είναι στο έδαφος, να εφάπτεται συγχρόνως και στις δύο καμπύλες που έχει το κυκλοειδές, αριστερά και δεξιά του M.

Άρα θα είναι όπως στο διπλανό σχήμα  
(του το εξήγησα τηλεφωνικά)

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος  $a = \frac{v^2}{R}$   
στο σημείο που πατά ο τροχός;



- Ανάλογα Γιώργο με τον τρόπο που θα επιλέξεις να τον χρησιμοποιήσεις και τις λέξεις που θα πεις.

Ας γίνω πιο σαφής:

Ο τύπος  $a = \frac{v^2}{R}$  δίνει το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου που κινείται. Το v είναι το μέτρο της ταχύτητας του σημείου εκείνη τη στιγμή και R είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του εκείνη τη στιγμή.

Όταν λοιπόν το M είναι στο έδαφος, η ταχύτητά του είναι μηδέν. Αλλά και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του είναι μηδέν. Άρα ο λόγος οδηγείται σε απροσδιόριστη μορφή.

Μπορεί η ταχύτητα εκείνη τη στιγμή να είναι μηδέν, όμως ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της  $\frac{dv}{dt}$  και συνεπώς το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του M δεν είναι μηδέν.

- Αν θεωρήσουμε την κίνηση του M σύνθετη από μια μεταφορική και μια περιστροφική μπορούμε να μιλήσουμε για κεντρομόλο;

**- Καταρχάς η κίνηση ενός υλικού σημείου δεν μπορεί ποτέ να είναι σύνθετη από μεταφορική και περιστροφική. Ένα υλικό σημείο ούτε μεταφέρεται, ούτε περιστρέφεται. Ένα υλικό σημείο απλά κινείται.**

Άρα θα ήταν καλύτερο νομίζω να αλλάζαμε λίγο τα λόγια μας και να τα «ξαναδίνουμε» κάπως έτσι:

Θεωρούμε ότι η εξίσωση κίνησης του τροχού είναι επαλληλία από την εξίσωση κίνησης μια μεταφορικής ευθύγραμμης ομαλής και από την εξίσωση κίνησης μιας περιστροφική γύρω από τον άξονά του.

Η επιτάχυνση  $\vec{a}$  του τυχαίου σημείου M του τροχού μπορεί συνεπώς να θεωρηθεί επαλληλία (άθροισμα) της επιτάχυνσης του M λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού (η οποία είναι μηδέν) και της επιτάχυνσης του M, λόγω της περιστροφικής κίνησης του τροχού ( η οποία είναι  $\frac{v^2}{R}$  και κατευθύνεται προς τον άξονα).

Άρα η επιτάχυνση  $\vec{a}$  του M έχει μέτρο  $0 + \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{R}$  = σταθερό και κατεύθυνση κάθετη προς τον άξονα του τροχού.

**Και είναι πολύ σημαντικό να θυμηθούμε ότι όλοι οι αδρανειακοί παρατηρητές θα βλέπουν την ίδια ακριβώς επιτάχυνση  $\vec{a}$ .**

**Και ο οδηγός του αυτοκινήτου και ο παρατηρητής στο έδαφος.**

### Για τον οδηγό του αυτοκινήτου:

Το Μ διαγράφει κύκλο με επιτάχυνση που έχει μέτρο  $\frac{v^2}{R}$  και κατεύθυνση κάθετα προς τον άξονα του τροχού. Η επιτάχυνση αυτή είναι αποκλειστικά κεντρομόλος που το μέτρο της είναι  $\frac{v^2}{R}$ . Όσο για την κατεύθυνση της θα τη ζωγραφίσει, για μια μόνο χρονική στιγμή, να κατευθύνεται κάθετα προς τον άξονα του τροχού.

Και λέμε θα τη ζωγραφίσει επειδή η διανυσματική της αναλυτική μαθηματική έκφραση δεν είναι εύκολη υπόθεση, αφού η κατεύθυνση της επιτάχυνσης αλλάζει συνεχώς.

### Για τον παρατηρητή στο έδαφος:

Το Μ διαγράφει κυκλοειδές με επιτάχυνση που έχει μέτρο  $\frac{v^2}{R}$  και κατεύθυνση κάθετα προς τον άξονα του τροχού. Η επιτάχυνση αυτή αναλύεται (αν θέλουμε ή αν υποχρεωνόμαστε) σε επιτρόχια και σε κεντρομόλο. Ο παρατηρητής αυτός μπορεί να ζωγραφίσει κάποια πράγματα και να κάνει κάποιους όχι και τόσο αυστηρούς υπολογισμούς αρκεί να αποφασίσει που είναι το κέντρο καμπυλότητας. Τα πράγματα και δω είναι δύσκολα γιατί οι συνιστώσες της επιτάχυνσης αλλάζουν τώρα και σε κατεύθυνση και σε μέτρο.

### **Το ερώτημα τώρα είναι τι εννοεί η άσκηση. Τον οδηγό ή τον παρατηρητή στο έδαφος:**

**Προφανώς τον παρατηρητή στο έδαφος, γιατί το 35m/s που μας δίνει η άσκηση είναι μέτρο ταχύτητας ως προς το έδαφος.**

Φαντάζεστε να δίνουμε σε μια άσκηση το 35m/s ως προς το έδαφος, να ζητάμε κάτι και όταν απαντήσει ο μαθητής να του λέμε ότι την πάτησε, γιατί εμείς του ζητούσαμε αυτό που του ζητούσαμε ως προς το παπάκι που πέρασε πριν από λίγο;

-Άρα, Θρασύβουλε, το Μ όταν «πατά» στο έδαφος έχει μηδέν κεντρομόλο...

-Ναι. Η επιτάχυνση του Μ εκείνη τη στιγμή δεν έχει κεντρομόλο συνιστώσα. Όταν ζητάμε την κεντρομόλο επιτάχυνση ενός σημείου Μ, ζητάμε τη συνιστώσα της επιτάχυνσης, που είναι κάθετη στην εφαπτόμενη της τροχιάς του Μ, έχει κατεύθυνση προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς και μέτρο  $\frac{v^2}{R}$ .

Τον παρατηρητή που θα κάνει αυτούς τους υπολογισμούς συνήθως τον επιλέγει η άσκηση μέσω των δεδομένων της. Και εδώ επέλεξε τον παρατηρητή στο έδαφος.

Άρα όταν λέει η άσκηση να βρεθεί η κεντρομόλος επιτάχυνση και η ταχύτητά του Μ, εννοεί (άσχετα αν αυτή η ίδια η άσκηση δεν το καταλαβαίνει) τα διανύσματα της κίνησης του Μ κατά τη διαγραφή του κυκλοειδούς, κατά την τροχιά δηλαδή που βλέπει ο παρατηρητής του εδάφους, μιας και το 35m/sec αφορά αυτόν.

Πάντως θα πρέπει να περιμένουμε ότι αυτοί οι υπολογισμοί δεν θα είναι μια εύκολη υπόθεση, μιας και πρέπει να μπουν χρονοεξαρτώμενες διανυσματικές γραφές, απαγορευτικές όχι μόνο για το μαθητή, αλλά και για τον απροετοίμαστο φυσικό.

.....  
Κλείσαμε το τηλέφωνο... Μα άρχισε να με «τρώει» το πράμα....

Άρχισα λοιπόν να αναζητώ λύση στην άσκηση 14 του σχολικού της Α΄ Λυκείου.

Μου πήρε δυόμισι μέρες για να ετοιμάσω τους αναλυτικούς υπολογισμούς και τις συναρτήσεις που δίνανε τις ταχύτητες, τις επιταχύνσεις, τις εξισώσεις ακτίνας καμπυλότητας, κέντρου τροχού κ.λ.π. σε δύο συστήματα συντεταγμένων όπως τα βλέπει ο παρατηρητής στο έδαφος.

Λέω σε δύο συστήματα, γιατί οι έννοιες της κεντρομόλου και της επιτρόχιας επιτάχυνσης δεν συνδέονται με το τρισδιάστατο σύστημα των μοναδιαίων σταθερών διανυσμάτων  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , αλλά με σύστημα δύο μόνο ορθογωνίων αξόνων «δεμένων» πάνω στο υλικό σημείο, που το ακολουθούν στην κίνησή του και που έχουν μοναδιαία διανύσματα  $(\vec{\rho}, \vec{\eta})$  προφανώς μεταβλητά χρονοεξαρτώμενα.

Το  $\vec{\rho}$  μοναδιαίο εφαπτόμενο της τροχιάς και το  $\vec{\eta}$  μοναδιαίο κάθετο σε αυτήν.

**Ακόμη και τρισδιάστατη να είναι η κίνηση του υλικού σημείου Μ, οι έννοιες κεντρομόλος και επιτρόχιας επιτάχυνση προκειμένου να οριστούν, θέλουν ειδικό μεταβλητό σύστημα δύο ορθογωνίων αξόνων.**

Τελειώνοντας, έστειλα το κείμενο που έχω αναρτήσει με τίτλο **«Η επιτάχυνση»** σε ένα άλλο φίλο φυσικό, τον Σταύρο, παρακαλώντας τον να κάνει μια προσομοίωση του φαινομένου και να σημειώσει τα διανύσματα με την ακρίβεια που είχαν οι υπολογισμοί μου.

Μετά τρεις μέρες σιωπής, μου έρχεται ένα e-mail που τρελάθηκα.

**Όλες οι συναρτήσεις μου ζωντανεμένες στην πιο μικρή λεπτομέρεια** (διευθύνσεις, μέτρα, μοναδιαία κ.λ.π.) **να γυρίζουν και να στρέφονται και να αυξομειώνεται το μέγεθός τους.** Και ένας τροχός να κυλάει κουβαλώντας του κόσμου τα διανύσματα πάνω του.

**Όμως το καταπληκτικό ήταν άλλο.**

**Κάτω από το έδαφος ένας φανταστικός κόσμος κύλαγε το δικό του τροχό!!! Αυτό δεν το είχα προβλέψει.**

Το βρήκε ο Σταύρος με την προσομοίωση **«κύλιση τροχού»** που έκανε, προκαλώντας με να αποδείξω όλα όσα έβλεπα να συμβαίνουν κάτω από το έδαφος.

Η προσομοίωση ξεδίπλωνε κρυμμένες πτυχές των συναρτήσεων που την υποστήριζαν και τρομερές συμμετρίες τους.

.....  
Μπορεί να λύθηκε η άσκηση 14 της Φυσικής Α΄ Λυκείου, μα εδώ και μέρες πολύ με βασανίζει τούτο:

Τελικά ο τροχός του κάτω κόσμου είναι εκείνος που κουβαλάει το κέντρο καμπυλότητας της κίνησης των ανθρώπων ή μήπως τελώνια μας ξεγελάνε και γελάνε με μας, κυλώντας το δικό τους τροχό κάτω από τα όνειρά μας και βάζοντάς μας να κουβαλάμε εμείς το δικό τους κέντρο καμπυλότητας;

Σκεφτόμουνα ότι ζωτικά και τελώνια με ξεγέλασαν.

Μουκλέψαν το μυαλό! Και όταν εγώ έστελνα στον Σταύρο χαρούμενος τις συναρτήσεις για τον τροχό των ανθρώπων, αυτά γελούσαν, γιατί ουσιαστικά με έβαζαν να του στέλνω τις συναρτήσεις του κέντρου καμπυλότητας και των διανυσμάτων του δικού τους τροχού...

Με ξεγέλασαν ακόμη και όταν εγώ χαιρόμουν, μιας και αυτά ήταν πιο χαρούμενα από μένα... Πετούσαν τα σκουφιά τους στον αέρα...

**Καλά Χριστούγεννα σε όλους....**

Κυριακή 20 Δεκεμβρίου 2009

Θρασύβουλος Κων. Μαχαίρας  
Φυσικός  
Γενικού Λυκείου Αγριάς