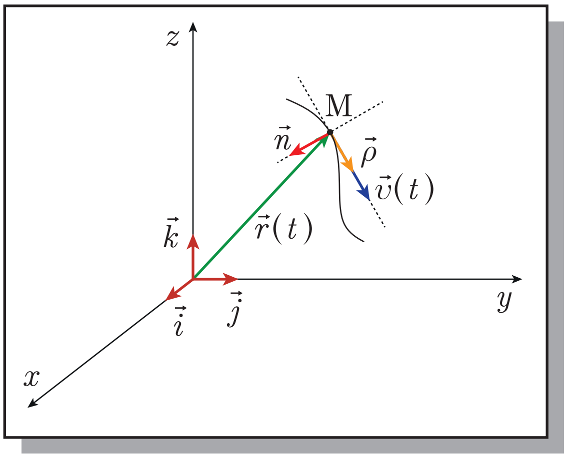
Η Επιτάχυνση

Έστω $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ το ***διάνυσμα θέσης*** του κινητού Μ και $\vec{\upsilon}(t)$ η ταχύτητά του *(Σχήμα 1)*.

Από τον ορισμό της ***ταχύτητας*** θα ισχύει

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad \text{ή πιο απλά } \vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1}$$

Άρα η ταχύτητα ως ***διανυσματική παράγωγος του διανύσματος θέσης*** θα είναι εφαπτόμενη στη τροχιά, στο σημείο που βρίσκεται το κινητό και θα έχει φορά τη φορά του $d\vec{r}$, δηλαδή τη φορά της κίνησης.



Σχήμα 1

Θα ισχύει

$$d\vec{r}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k} \tag{2}$$

και συνεπώς

$$\left|d\vec{r}\right|^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$$

δηλαδή

$$\left|d\vec{r}\right|=ds \tag{3}$$

όπου s είναι το μήκος της τροχιάς μετρημένο από την αρχική θέση του κινητού.

Το μέτρο της ταχύτητας του κινητού είναι

$$\upsilon=\left|\vec{\upsilon}\right|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{\left|d\vec{r}\right|}{dt}=\frac{ds}{dt}>0 \tag{4}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\rho}$ που έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας και άρα της κίνησης και είναι συγχρόνως εφαπτόμενο στην τροχιά στη θέση Μ που βρίσκεται το κινητό είναι

$$\vec{\rho}=\frac{\vec{\upsilon}}{\left|\vec{\upsilon}\right|}=\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} \tag{5}$$

Παίρνοντας υπόψη τις σχέσεις (1) και (4) προκύπτει

$$\vec{\rho} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Συνεπώς το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας και άρα της κίνησης και είναι συγχρόνως εφαπτόμενο στην τροχιά στη θέση Μ που βρίσκεται το κινητό είναι

$$\vec{\rho} = \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1), (4) και (6) παίρνουμε διαδοχικά

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \Rightarrow \vec{\upsilon} = \upsilon\cdot\vec{\rho} \tag{7}$$

Παραγωγίζοντας τη διανυσματική σχέση (7) προκύπτει η επιτάχυνση του υλικού σημείου Μ

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon\cdot\vec{\rho}) = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{\rho} + \upsilon\cdot\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{\rho} + \upsilon\cdot\frac{d\vec{\rho}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

και τελικά

$$\vec{\alpha} = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{\rho} + \upsilon^2\cdot\frac{d\vec{\rho}}{ds} \tag{8}$$

Από τον ορισμό του (σχέση 5) το $\vec{\rho}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και συνεπώς

$$\vec{\rho}\cdot\vec{\rho} = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}) = 0 \Rightarrow 2\vec{\rho}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{\rho}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{ds} = 0$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι ***τα διανύσματα*** $\vec{\rho}$ και $\frac{d\vec{\rho}}{ds}$ έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν και άρα ότι ***είναι κάθετα μεταξύ τους***.

Το διάνυσμα $\vec{\rho}$ είναι το μοναδιαίο, το εφαπτόμενο στην τροχιά, στη θέση που βρίσκεται το κινητό.

Κατά συνέπεια το $\frac{d\vec{\rho}}{ds}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην (εφαπτόμενη) τροχιά στη θέση που βρίσκεται το κινητό.

Επομένως το ***κύριο μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο*** στην τροχιά είναι το $\vec{\eta}$ που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\eta} = \frac{\dfrac{d\vec{\rho}}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{\rho}}{ds}\right|} \tag{9}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\frac{d\vec{\rho}}{ds} = \left|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right| \cdot \vec{\eta} \tag{10}$$

Αντικαθιστώντας την (10) στην (8) προκύπτει ότι ***η επιτάχυνση του υλικού σημείου Μ που κινείται σε χώρο τριών διαστάσεων σε τυχαία τροχιά*** $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ***είναι***

$$\vec{\alpha} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\rho} + \upsilon^2 \left|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right| \cdot \vec{\eta} \tag{11}$$

Από τη (11) βλέπουμε ότι ***η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου που κινείται σε χώρο τριών διαστάσεων αναλύθηκε σε μεταβλητό σύστημα δύο αξόνων με μοναδιαία τα δύο πολύ σημαντικά μεταβλητής κατεύθυνσης διανύσματα*** $\vec{\rho}$ και $\vec{\eta}$ **.**(*)

Αυτή η ανάλυση είναι πολύ σπουδαία για την επιτάχυνση. Πράγματι:

Η συνιστώσα $\dfrac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\rho}$ *της επιτάχυνσης* $\vec{\alpha}$

- Έχει διεύθυνση τη διεύθυνση του $\vec{\rho}$, δηλαδή τη διεύθυνση της ταχύτητας του κινητού Μ.
- Έχει τη φορά του $\vec{\rho}$, δηλαδή τη φορά της ταχύτητας, αν ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας $\dfrac{d\upsilon}{dt}$ είναι θετικός, δηλαδή αν το μέτρο της ταχύτητας αυξάνει. Έχει φορά αντίθετη από εκείνη της ταχύτητας αν το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται.
- Ονομάζεται *επιτρόχιος συνιστώσα της επιτάχυνσης του Μ* ή απλά *επιτρόχιος επιτάχυνση του Μ.*

Άρα ***η επιτρόχιος επιτάχυνση*** του Μ είναι

$$\vec{\alpha}_E = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\rho} \tag{12}$$

(*) Η ανάλυση της επιτάχυνσης σε τρεις συνιστώσες παράλληλες με τους άξονες είναι εύκολη και γίνεται βάσει του ορισμού της επιτάχυνσης

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \tag{13}$$

Η συνιστώσα $\vec{\alpha}_K = \upsilon^2 \left|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right| \cdot \vec{\eta}$ της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$

- Έχει διεύθυνση τη διεύθυνση του $\vec{\eta}$, δηλαδή κάθετη στην διεύθυνση της ταχύτητας του Μ.
- Έχει ***πάντα*** τη φορά του $\vec{\eta}$ γιατί ο συντελεστής $\upsilon^2 \left|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right|$ του $\vec{\eta}$ είναι θετικός.(*)
- Ονομάζεται *κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης του Μ* ή απλά *κεντρομόλος επιτάχυνση του Μ.*

Άρα ***η κεντρομόλος επιτάχυνση*** του Μ είναι

$$\vec{\alpha}_K = \upsilon^2 \left|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right| \cdot \vec{\eta} \qquad (14)$$

Την παραπάνω σχέση μπορούμε να επεξεργαστούμε ώστε να προκύψουν και ***άλλες σχέσεις για την κεντρομόλο επιτάχυνση:***

Πράγματι λόγω της σχέσης (6) είναι $\vec{\rho} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ και συνεπώς

$$\left|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right| = \left|\frac{d}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\cdot\vec{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\cdot\vec{k}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \qquad (15)$$

Από (14) και (15) έχουμε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται και από τη σχέση

$$\vec{\alpha}_K = \upsilon^2 \left|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right| \cdot \vec{\eta} = \upsilon^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \cdot \vec{\eta} \qquad (16)$$

Καλώντας

$$R = \left[\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}\right]^{-1} \qquad (17)$$

την ***ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς*** μπορούμε να γράψουμε για την κεντρομόλος επιτάχυνση του Μ

$$\vec{\alpha}_K = \frac{\upsilon^2}{R} \cdot \vec{\eta} \qquad (18)$$

(*) Ας προσέξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\rho}$ και $\vec{\eta}$ είναι τελείως καθορισμένα βάσει των ορισμών τους, στους οποίους βέβαια πρέπει να καταφύγουμε αν θελήσουμε να τα προσδιορίσουμε.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (11), (12), (13) και (18) προκύπτει ότι ***η επιτάχυνση του υλικού σημείου Μ*** που κινείται σε τρισδιάστατο χώρο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο συνιστωσών, της επιτρόχιας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης, ως εξής:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_E + \vec{\alpha}_K = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{\rho} + \frac{\upsilon^2}{R}\cdot\vec{\eta} \qquad (19)$$

όπου:

R είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο όπου βρίσκεται το κινητό

και ορίζεται βάσει των σχέσεων (16) και (17) ως

$$R = \left[\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}\right]^{-1}$$

$\vec{\rho}$ ***είναι το μοναδιαίο διάνυσμα*** και ορίζεται βάσει της σχέσης (5) ως

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{\upsilon}}{|\vec{\upsilon}|} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$$

ή βάσει της σχέσης (6) ισοδύναμα ως

$$\vec{\rho} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$\vec{\eta}$ ***είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο*** $\vec{\rho}$ και ορίζεται βάσει της (9) ως

$$\vec{\eta} = \frac{\dfrac{d\vec{\rho}}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{\rho}}{ds}\right|}$$

Από τη σχέση (19) προκύπτουν τα εξής:

α) Τις χρονικές στιγμές που ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας είναι μηδέν, όταν δηλαδή $\frac{d\upsilon}{dt}$ =0, η επιτρόχιος συνιστώσα της επιτάχυνσης του κινητού θα είναι μηδέν.

β) Τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται η ταχύτητα ενός κινητού μηδενίζεται και η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσής του.

Θα πρέπει βέβαια να σκεφτούμε ότι όταν μηδενίζεται (στιγμιαία) η ταχύτητα ενός κινητού δεν είναι απαραίτητο να μηδενίζεται (στιγμιαία) και ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.

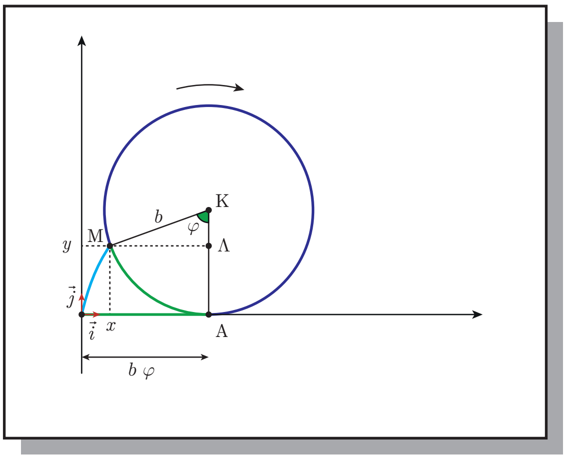
Στιγμιαίος μηδενισμός και της ταχύτητας και του ρυθμού μεταβολής της συγχρόνως, οδηγεί το κινητό σε ακινησία.

Εφαρμογή σε κύλιση τροχού χωρίς ολίσθηση *(επίπεδη κίνηση στερεού)*:

Ισχύουν:

- ✓ Η διεύθυνση κίνησης του κέντρου μάζας του αυτοκινήτου είναι σταθερή. Άρα τα σημεία του πέλματος του τροχού κινούνται σε επίπεδο με αποτέλεσμα το πρόβλημά μας να περιορίζεται σε δύο διαστάσεις.
- ✓ Ο τροχός δεν ολισθαίνει.

Για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς του τυχαίου σημείου Μ στο πέλμα του τροχού μπορούμε, χωρίς να μειώνεται η γενικότητα των αποτελεσμάτων, να θεωρήσουμε ότι τη χρονική στιγμή t=0 το σημείο Μ βρισκόταν στην αρχή των αξόνων *(Σχήμα 2)*.



Σχήμα 2

Επειδή ο τροχός δεν ολισθαίνει, όταν θα έχει στραφεί κατά γωνία φ, το σημείο επαφής του Α του τροχού με το έδαφος θα απέχει από την αρχή των αξόνων b·φ , όπου b είναι η ακτίνα του τροχού.

Οι συντεταγμένες του σημείου Μ και κατά συνέπεια η τροχιά του θα περιγράφεται από τις εξισώσεις ***x=bφ−(ΜΛ)*** και ***y=b−b(ΚΛ)***

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΛ προκύπτει τελικά ότι οι εξισώσεις της τροχιάς του Μ θα είναι

$$x=b(\varphi-\eta\mu\varphi) \tag{20}$$

$$y=b(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) \tag{21}$$

Η γωνία φ είναι φ≥0 και μετριέται σε rad

Συνεπώς

$$dx=b\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot d\varphi \tag{22}$$

$$dy=b\cdot\eta\mu\varphi\cdot d\varphi \tag{23}$$

Αν s είναι το μήκος της τροχιάς από την αρχή της κίνησης, θα ισχύει

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = b^2(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)^2 d\varphi^2 + b^2\eta\mu^2\varphi\, d\varphi^2$$

και τελικά

$$ds = \sqrt{2}\, b\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}\, d\varphi \tag{24}$$

Η γωνία φ είναι συνάρτηση του χρόνου t. Η συγκεκριμένη όμως μορφή αυτής της συνάρτησης εξαρτάται από το είδος της κίνησης του αυτοκινήτου.

Για ευκολία των υπολογισμών μας, για να μη γίνουν δηλαδή πολύπλοκες οι παραγωγήσεις μια και οι συναρτήσεις είναι σύνθετες και οι μαθητές είναι μόνο Α΄ Λυκείου , θα θεωρήσουμε ότι η γωνία φ είναι ανάλογη του χρόνου .

Θεωρούμε λοιπόν $\varphi=\omega t$.

Τότε οι παραπάνω σχέσεις (20), (21) και (24) γίνονται

$$x=b(\omega t-\eta\mu\omega t) \qquad (25)$$

$$y=b(1-\sigma\upsilon\nu\omega t) \qquad (26)$$

$$ds=\sqrt{2}\,b\,\omega\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega t}\;dt \qquad (27)$$

και άρα οι χρονικοί παράγωγοι

$$\frac{dx}{dt}=b\omega(1-\sigma\upsilon\nu\omega t) \qquad (28)$$

$$\frac{dy}{dt}=b\omega\,\eta\mu\omega t \qquad (29)$$

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2}\,b\,\omega\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega t} \qquad (30)$$

Λόγω της σχέσης (4) το μέτρο της ταχύτητας του Μ είναι $\upsilon=\dfrac{ds}{dt}$ και άρα

$$\upsilon=\sqrt{2}\,b\,\omega\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega t} \qquad (31)$$

ή πιο απλά

$$\upsilon=2b\omega\left|\eta\mu\frac{\omega t}{2}\right| \qquad (32)$$

Υπολογισμός της ταχύτητας του (υλικού) σημείου Μ του πέλματος του τροχού:

α) Στο σύστημα αξόνων $(\vec{i},\vec{j})$

Το διάνυσμα θέσης του σημείου Μ είναι

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$$

και η ταχύτητά του

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i}+\frac{dy}{dt}\cdot\vec{j}$$

Η παραπάνω σχέση λόγω των (28) και (29) δίνει ***την ταχύτητα του σημείου Μ στους άξονες x και y ή αλλιώς στο σύστημα αξόνων*** $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

$$\vec{\upsilon} = b\omega\,(1-\sigma\upsilon\nu\omega t\,)\,\vec{i} + b\omega\,\eta\mu\omega t\,\vec{j} \qquad (33)$$

β) Στο σύστημα αξόνων $(\vec{\rho},\vec{\eta}\,)$

Λόγω της σχέσης (7) $\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{\rho}$ μπορούμε να βρούμε ότι η ταχύτητα του Μ στο σύστημα αξόνων $(\vec{\rho},\vec{\eta}\,)$ είναι

$$\vec{\upsilon} = \sqrt{2}\,b\,\omega\,\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega t}\cdot\vec{\rho} \qquad (34)$$

Όπως εύκολα φαίνεται και από τις δύο σχέσεις (33) και (34) το μέτρο υ της ταχύτητας, ανεξάρτητα από το σύστημα αξόνων που θα χρησιμοποιηθεί, είναι αυτό που υπολογίσαμε στις σχέσεις (31) και (32).

Υπολογισμός της επιτρόχιας επιτάχυνσης του (υλικού) σημείου Μ του πέλματος του τροχού:

α) Στο σύστημα αξόνων $(\vec{\rho},\vec{\eta}\,)$

Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του Μ είναι

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\,b\,\omega\,\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega t}\right) = \omega^2 b\,\frac{\eta\mu\frac{\omega t}{2}}{\left|\eta\mu\frac{\omega t}{2}\right|}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega t}{2} \qquad (35)$$

Από τη σχέση (12) προκύπτει ότι ***η επιτρόχιος επιτάχυνση του Μ*** είναι

$$\vec{\alpha}_E = \left(\omega^2 b\,\frac{\eta\mu\frac{\omega t}{2}}{\left|\eta\mu\frac{\omega t}{2}\right|}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega t}{2}\right)\cdot\vec{\rho} \qquad \text{με} \qquad t\geq 0 \qquad (36)$$

β) Στο σύστημα αξόνων $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

Λόγω της σχέσης (6)

$$\vec{\rho} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{ds}\cdot\vec{j} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\cdot\vec{i} + \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\cdot\vec{j}$$

Παίρνοντας υπόψη τις (28), (29) και (30) η παραπάνω σχέση δίνει τελικά

$$\vec{\rho} = \left|\eta\mu\frac{\omega t}{2}\right| \cdot \vec{i} + \frac{\eta\mu\frac{\omega t}{2}}{\left|\eta\mu\frac{\omega t}{2}\right|}\ \sigma\upsilon\nu\frac{\omega t}{2} \cdot \vec{j} \qquad (37)$$

Συνδυάζοντας τις (36) και (37) προκύπτει

$$\vec{\alpha}_E = \frac{\omega^2 b}{2} \cdot \eta\mu\omega t \cdot \vec{i} + \frac{\omega^2 b}{2}(1 + \sigma\upsilon\nu\omega t) \cdot \vec{j} \qquad (38)$$

Υπολογισμός της κεντρομόλου επιτάχυνσης του (υλικού) σημείου Μ του πέλματος του τροχού:

α) Στο σύστημα αξόνων $(\vec{\rho}, \vec{\eta})$

Είναι $$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{b\omega(1 - \sigma\upsilon\nu\omega t)}{\sqrt{2}b\omega\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\omega t}}$$

δηλαδή $$\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{2(1 - \sigma\upsilon\nu\omega t)}}{2}$$

οπότε $$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d}{dt}\frac{dx}{ds}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\omega t}{2}}{4b\eta\mu\frac{\omega t}{2}} \qquad (39)$$

Όμοια $$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{4b} \qquad (40)$$

Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο που βρίσκεται το κινητό είναι

$$R = \left[\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}\ \right]^{-1}$$

Αντικαθιστώντας τις (39) και (40) προκύπτει

$$R = 4b\left|\eta\mu\frac{\omega t}{2}\right| \qquad (41)$$

Συνδυάζοντας τις (18), (31) και (41) βρίσκουμε τη κεντρομόλο επιτάχυνση

$$\vec{\alpha}_K = \omega^2 b \left| \eta\mu \frac{\omega t}{2} \right| \cdot \vec{\eta} \qquad (42)$$

β) Στο σύστημα αξόνων $(\vec{i}, \vec{j})$

Από τη σχέση (33) μπορούμε εύκολα να πάρουμε την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σημείου Μ παραγωγίζοντας την ταχύτητα. Είναι

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = b\omega^2 \eta\mu\omega t \cdot \vec{i} + b\omega^2 \sigma\upsilon\nu\omega t \cdot \vec{j} \qquad (43)$$

Όμως

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_E + \vec{\alpha}_K \Rightarrow \vec{\alpha}_K = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_E$$

Αντικαθιστώντας τις (38) και (43)

$$\vec{\alpha}_K = \frac{\omega^2 b}{2} \eta\mu\omega t \cdot \vec{i} - \frac{\omega^2 b}{2} (1 - \sigma\upsilon\nu\omega t) \cdot \vec{j} \qquad (44)$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να βρούμε την κεντρομόλο επιτάχυνση του Μ αν υπολογίζαμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\eta}$ από τη σχέση (9)

$$\vec{\eta} = \frac{\frac{d\vec{\rho}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{\rho}}{ds} \right|}$$

και το αντικαθιστούσαμε στη σχέση (42)

....

Το ανεκδιήγητο:

Έχοντας υπόψη όλα τα παραπάνω ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου είναι τώρα πανέτοιμος να λύσει την άσκηση 14 σελίδα 158 του σχολικού βιβλίου Φυσικής Α΄ Λυκείου

«Ένα όχημα έχει λάστιχα διαμέτρου 0,8 m. Βρείτε την ταχύτητα και την κεντρομόλο επιτάχυνση ενός σημείου στο πέλμα του ελαστικού όταν το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 35 m/sec»

Τρίτη 22 Δεκεμβρίου 2009

Θρασύβουλος Κων. Μαχαίρας