Περίπτωση άσκησης όπου δίνεται η συνολική ενέργεια τμήματος χορδής

«Σε χορδή ΟΒ μήκους L = 0,9 m με ελεύθερο το άκρο της Ο διαδίδονται με ταχύτητα υ = 4 m/s δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα πλάτους A = 0,1 m και με αντίθετη φορά διάδοσης. Μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος θεωρούμε ως αρχή συντεταγμένων Ο (x = 0) το ελεύθερο άκρο της χορδής και ως t = 0 τη στιγμή που η κοιλία στη θέση αυτή, είναι στη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα ταλάντωσης. Παρατηρούμε ότι στη χορδή υπάρχουν πέντε ακίνητα σημεία:

1) *Να βρεθούν το μήκος κύματος λ και η συχνότητα ταλάντωσης f.*

2) *Να γραφεί η εξίσωση y (x, t) του στάσιμου κύματος.*

3) *Μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος να γίνει η γραφική παράσταση της φάσης ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της χορδής σε συνάρτηση με:*

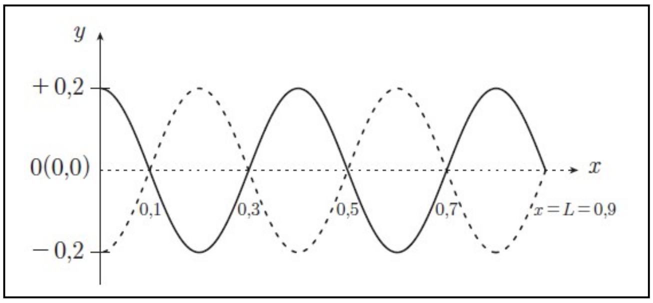
3α) *το χρόνο t*

3β) *τη συντεταγμένη x, τη χρονική στιγμή t_1 = 0,1 s.*

4) *Αν η συνολική ενέργεια ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής είναι E = 5 Joule, να βρείτε για τη χρονική στιγμή t_2 =61/60 s την κινητική τους και τη δυναμική τους ενέργεια ταλάντωσης.»*

Η λύση που δόθηκε στους μαθητές

1) Οι δεσμοί σχηματίζονται στις θέσεις $x_\Delta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$. Για τον πέμπτο δεσμό *(k=4)* που σχηματίζεται στη θέση



$$x_\Delta = 0,9m$$

ισχύει $$0,9 = (2\cdot 4+1)\frac{\lambda}{4}$$

από όπου $\lambda = 0,4m$

Όμως

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow 4 = 0,4f \Rightarrow f = 10Hz$$

και άρα $$\omega = 20\pi\frac{rad}{s}$$

2) Η εξίσωση του στάσιμου είναι

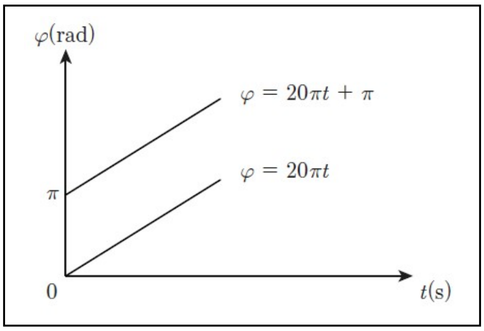
$$y(x,t) = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t = 0,2\sigma\upsilon\nu 5\pi x\eta\mu 20\pi t \qquad (SI) \qquad (1)$$

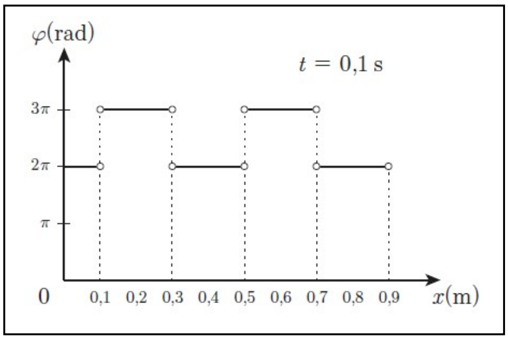
3α) Η φάση των διαφόρων σημείων είναι

$$\varphi = 20\pi t \qquad \text{για} \qquad x \in \big((0-0,1),(0,3-0,5),(0,7-0,9)\big)m \qquad (2)$$

$$\varphi = 20\pi t + \pi \qquad \text{για} \qquad x \in \left(\left(0,2-0,3\right),\left(0,5-0,7\right)\right)m \qquad (3)$$

3β)





4) Όπως είδαμε η εξίσωση του στάσιμου είναι η (1)

$$y(x,t) = 0,2\sigma\upsilon\nu 5\pi x \eta\mu 20\pi t$$

η οποία για $t_2 = 61/60\ s$ δίνει

$$y(x) = 0,2\sigma\upsilon\nu 5\pi x \eta\mu 20\pi \frac{61}{60} = \frac{\sqrt{3}}{2} 0,2\sigma\upsilon\nu 5\pi x \qquad (SI) \qquad (4)$$

Η ενέργεια της στοιχειώδους μάζας m_i, στη θέση x_i, δίνεται από τη σχέση

$$E_i = \frac{1}{2} D A_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 \left(0,2\sigma\upsilon\nu 5\pi x_i\right)^2 = 0,02\omega^2 m_i \sigma\upsilon\nu^2 5\pi x_i \qquad (SI) \qquad (5)$$

Άρα η ενέργεια όλης της χορδής είναι

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = 0,02\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i \sigma\upsilon\nu^2 5\pi x_i = 5\, joule \qquad (6)$$

Λόγω της σχέσης (4) η δυναμική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας m_i που είναι στη θέση x_i την χρονική στιγμή $t = \frac{61}{60} s$ είναι

$$U_i = \frac{1}{2} D y_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} 0,2\sigma\upsilon\nu 5\pi x_i\right)^2 = \frac{3}{4} m_i 0,02\omega^2 \sigma\upsilon\nu^2 5\pi x_i \qquad (SI) \qquad (7\alpha)$$

Η δυναμική ενέργεια όλης της χορδής είναι

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = \frac{3}{4} 0,02\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i \sigma\upsilon\nu^2 5\pi x_i \qquad (SI) \qquad (7)$$

ή λόγω της (6)

$$U = \frac{3}{4}E = \frac{3}{4}5 = 3,75 Joule$$

Προφανώς η κινητική ενέργεια της χορδής είναι

$$K = E - U = 1,25 Joule$$

Σχόλια για την άσκηση και τη λύση της

i) *«Σε χορδή ΟΒ μήκους L = 0,9 m...»* δεν είναι δυνατό ούτε να σχηματιστούν, ούτε να διαδοθούν τα μονοχρωματικά κύματα που υπονοεί η άσκηση. Ο χώρος των 0,9 m (μήκος χορδής) είναι πάρα πολύ μικρός για ένα μονοχρωματικό κύμα με μήκος κύματος 0,4m ακόμη και για να κάνεις την πιο χονδροειδή προσέγγιση.

Θεωρητικά τα μονοχρωματικά κύματα απαιτούν άπειρη έκταση *(βλέπε θεώρημα bandwidth)*, δεν έχουν μέτωπο και τελικά εκείνο που διαδίδουν δεν είναι η διαταραχή αυτή καθεαυτή (μιας και είναι ήδη αποκατεστημένη με μιας σε όλο το άπειρο μέσο), αλλά η ενέργεια, η (εγκάρσια) ορμή και η φάση. Η τελευταία γίνεται αντιληπτή κυρίως ως «διάδοση» όρων και κοιλάδων.

ii) Στην εκφώνηση της άσκησης (σε συμφωνία δυστυχώς με το σχολικό βιβλίο) υπονοείται ότι το στάσιμο κύμα είναι προϊόν συνάντησης δύο τρεχόντων μονοχρωματικών κυμάτων αντίθετης κατεύθυνσης διάδοσης.

Αυτό δεν είναι ούτε προσέγγιση, ούτε διδακτική επιλογή. Είναι καθαρό επιστημονικό λάθος.

Θα μπορούσαν όλα αυτά να είχαν αποφευχθεί αν στην εκφώνηση δεν γινόταν νύξη για τα μονοχρωματικά κύματα, αλλά πηγαίναμε κατευθείαν στο στάσιμο που ουσιαστικά είναι και ο στόχος της «άσκησης».

iii) Η μορφή της εξίσωσης ενός μονοχρωματικού κύματος δεν είναι αυτονόητη μιας και όλες οι παρακάτω εξισώσεις μπορούν να περιγράψουν μονοχρωματικά κύματα

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{αλλά και} \quad y = A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_{\mp}\right]$$

$$\text{και} \quad y = A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{και} \quad y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) + \rho_{\mp}\right] \quad \text{κ.λπ}$$

Συνεπώς ή θα πρέπει να γίνουν δεκτές ως απάντηση όλες οι ισοδύναμες εξισώσεις κάποιου συγκεκριμένου μονοχρωματικού ή θα πρέπει να δοθούν στοιχεία ώστε να πάμε σε συγκεκριμένη εξίσωση.

Αυτό ίσως φαίνεται περιττό, λόγω του σχολικού βιβλίου το οποίο υιοθετεί μια μόνο μορφή μονοχρωματικών κυμάτων, εκείνη με το ημίτονο και τον χρόνο *t* να προηγείται του χώρου *x* στο όρισμα, αλλά πιστεύω ότι ένας Φυσικός διδάσκει ακόμη και όταν προσπαθεί να συνηθίσει τα παιδιά στις σωστές εκφράσεις. Έστω κι αν οι μαθητές του αγνοούν εκείνη τη στιγμή το βάθος και την αξία των εκφράσεων.

Τα ίδια ισχύουν και για τις εξισώσεις του στάσιμου κύματος.

iv) Ζητείται το μήκος κύματος γενικώς, ενώ η έκφραση θα έπρεπε να ήταν πιο συγκεκριμένη. Θα έπρεπε να ζητείται το μήκος κύματος των τρεχόντων μονοχρωματικών κυμάτων ή κάτι παρεμφερές, γιατί στο σχολικό βιβλίο δεν έχει ορισθεί μήκος κύματος στάσιμου κύματος, παρόλο που τέτοιος ορισμός υπάρχει.

v) Οι συμβολισμοί στις σχέσεις (2) και (3) της λύσης που δόθηκε στους μαθητές, δηλαδή οι

$$\varphi = 20\pi t \qquad \text{για} \qquad x \in \big((0-0{,}1),(0{,}3-0{,}5),(0{,}7-0{,}9)\big)m$$

$$\text{και} \qquad \varphi = 20\pi t + \pi \qquad \text{για} \qquad x \in \big((0{,}2-0{,}3),(0{,}5-0{,}7)\big)m$$

είναι μαθηματικά εντελώς απαράδεκτοι.

Μια σωστή γραφή είναι η

$$\varphi = 20\pi t \qquad \text{με} \qquad x \in (0 \;,\; 0{,}1) \cup (0{,}3 \;,\; 0{,}5) \cup (0{,}7 \;,\; 0{,}9) \qquad (SI)$$

$$\text{και} \qquad \varphi = 20\pi t + \pi \qquad \text{με} \qquad x \in (0{,}2 \;,\; 0{,}3) \cup (0{,}5 \;,\; 0{,}7) \qquad (SI)$$

vi) Δεν υπάρχει καμιά μαθηματική συνέπεια ανάμεσα στη συνάρτηση (1) της λύσης που δόθηκε στα παιδιά

$$y(x,t) = 0{,}2\sigma\upsilon\nu 5\pi x \eta\mu 20\pi t \qquad (1)$$

και την σχέση (5) που αφορά στην ενέργεια της στοιχειώδους μάζας

$$E_i = 0{,}02\omega^2 m_i \sigma\upsilon\nu^2 5\pi x_i \qquad (5)$$

Στην (1) η διαταραχή $y(x,t)$ (το στάσιμο κύμα δηλαδή) είναι μια συνεχής συνάρτηση του x και του t και συνεπώς η χορδή αντιμετωπίζεται σωστά ως συνεχές μέσο

Στη δεύτερη όμως σχέση (5) που αφορά στην ενέργεια E_i των υλικών σημείων της χορδής η ενέργεια δεν είναι συνεχής συνάρτηση των x και t και συνεπώς η χορδή αντιμετωπίζεται ως σύνολο διακριτών σημείων (ανεξάρτητων ταλαντωτών).

Όμως η κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

των **διπλών παραγωγίσεων** ως προς x και t, όταν πρόκειται να εφαρμοστεί στη χορδή, προβλέπει για τη χορδή συνεχείς συναρτήσεις όλων των μεγεθών που την αφορούν (απομακρύνσεις, ορμές, ενέργειες, φάση κ.λπ).
Επομένως η ενέργεια της χορδής ή τμήματός της δεν υπολογίζεται ως άθροισμα διακριτών τιμών διακριτών ταλαντωτών, αλλά ως ολοκλήρωμα **πυκνότητας ενέργειας** που είναι μέγεθος συνεχές και ικανό να ορισθεί σε μαθηματικό σημείο.

vi) Για τους ίδιους λόγους μαθηματικά ασυνεπείς είναι και οι σχέσεις (7α) και (7) που αφορούν στη δυναμική ενέργεια.

vii) **Όλες οι σχέσεις που αναφέρονται στην δυναμική ενέργεια και στην (ολική) ενέργεια και οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στη λύση που δόθηκε στα παιδιά είναι εντελώς λανθασμένες.**

(βλέπε στο βιβλίο μου «Κύματα»)

viii) Στην παραπάνω λύση η χορδή αντιμετωπίζεται άλλοτε ως συνεχές μέσο προκειμένου να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος και άλλοτε ως σύνολο ανεξάρτητων απλών αρμονικών ταλαντωτών, η συνολική ενέργεια των οποίων βρίσκεται απλώς προσθέτοντας ανεξάρτητα πράγματα.

Αυτό δεν είναι απλά λανθασμένο από άποψης Μαθηματικών, αλλά είναι συγχρόνως και εντελώς απαράδεκτο από άποψης Φυσικής, διότι

α) Η χορδή πρέπει να θεωρηθεί ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ συνεχές μέσο αν θέλουμε να εφαρμόσουμε την κυματική εξίσωση και να γράψουμε σχέσεις του τύπου $y(x,t)=0,2\sigma\upsilon\nu 5\pi x\eta\mu 20\pi t$ για το στάσιμο κύμα.

Με άλλα λόγια, διακριτοί ταλαντωτές που αριθμούνται από i=1 έως i=N και εξίσωση στάσιμου κύματος της μορφής $y(x,t)=0,2\sigma\upsilon\nu 5\pi x\eta\mu 20\pi t$ δεν συνάδουν μεταξύ τους.

β) Οι στοιχειώδεις μάζες της χορδής δεν είναι διακριτοί (ανεξάρτητοι) απλοί αρμονικοί ταλαντωτές και συνεπώς οι ενέργειές τους δεν είναι σταθερές και δε δίνονται από τη σχέση $E=\frac{1}{2}DA^2$. Το ίδιο μεταβλητή είναι γενικά και η ενέργεια μιας χορδής ή τμήματός της.

γ) Οι στοιχειώδεις μάζες της χορδής δεν είναι δυνατό να έχουν σταθερή ενέργεια γιατί με μια τέτοια περίπτωση δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κύμα (τρέχον ή στάσιμο) πάνω στη χορδή. Η σταθερότητα της ενέργειας δεν εξασφαλίζει ύπαρξη κύματος κυματικής εξίσωσης.

ix) Δεν είναι σωστή η έκφραση *«φάση ταλάντωσης»*, αλλά εκφράσεις που τονίζουν την εξίσωση ταλάντωσης όπως π.χ.
«φάση στην ... (τάδε συγκεκριμένη) εξίσωση ταλάντωσης»

....
(Ας μην προχωρήσουμε όμως άλλο στα λάθη της συγκεκριμένης άσκησης)...

Συμπέρασμα

Η παραπάνω άσκηση και η λύση της είναι ένα συνονθύλευμα από άσχετα πράγματα, εντελώς απαράδεκτα και για τη Φυσική και για τα Μαθηματικά. Είναι ένα επιστημονικό λάθος και επομένως πρέπει να απορριφθεί.

(Οι ενστάσεις μου για την εν λόγω άσκηση κατατίθενται πιο αναλυτικά στο βιβλίο μου «Κύματα»)

Κυριακή 1 Οκτωβρίου 2017

Θρασύβουλος Μαχαίρας
Φυσικός