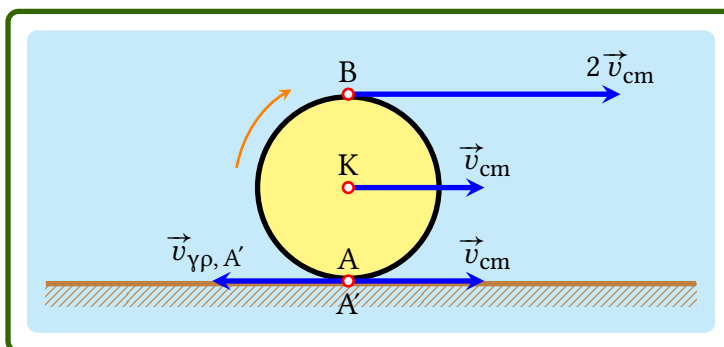


Περί κύλισης ...

(οι κινήσεις που μελετάμε είναι επίπεδες)

Κάποτε σε κάποια ιστοσελίδα Φυσικών διάβασα έναν ορισμό για την κύλιση τροχού:

«Κύλιση ενός τροχού είναι εκείνη η κίνηση, όπου δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των σημείων επαφής $A - A'$ του τροχού και του εδάφους»



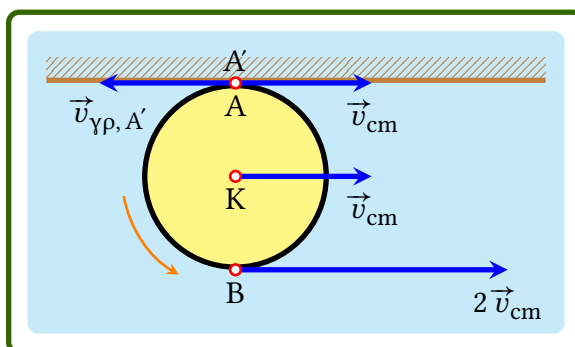
Σχήμα 1

Προφανώς ο ορισμός αυτός δε μπορεί να γίνει δεκτός. Και μόνο στις υπογραμμισμένες έννοιες να εστιάσουμε, καταλαβαίνουμε αμέσως πόσα προβλήματα δημιουργεί:

- α. Δεν είναι δυνατόν να οριστεί κάποια έννοια της Φυσικής μέσω της έννοιας «έδαφος», η οποία μας παραπέμπει σε κάτι (χώμα, σανίδα, άλλο σώμα κ.λπ) που είναι «κάτω» από τον τροχό.

Αν στον ορισμό χρησιμοποιηθεί η λέξη «έδαφος» και μάλιστα όπως την έχουμε «λαϊκά» καταχωρήσει στο μυαλό μας, θα φτάσουμε στο άτοπο ότι δεν υπάρχει κύλιση τροχού σε ταβάνι ή σε τοίχο, γιατί αυτά δεν αποτελούν «έδαφος».

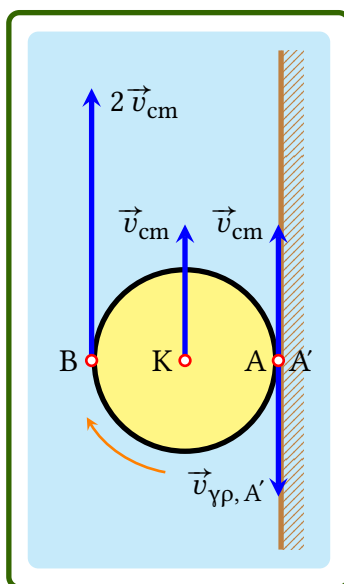
Όμως αν αναστρέψουμε το σχήμα 1, τότε το πριν «έδαφος» γίνεται ταβάνι χωρίς η κίνηση να έχει αλλάξει κανένα χαρακτηριστικό της (σχήμα 2)



Σχήμα 2

Αν γυρίσουμε το σχήμα 1 κατά 90 μοίρες το πριν «έδαφος» γίνεται τοίχος χωρίς η κίνηση να έχει αλλάξει κανένα χαρακτηριστικό της (σχήμα 3)

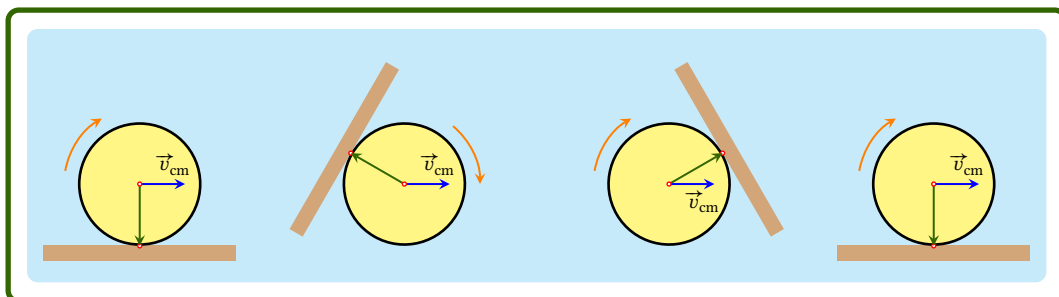
Συνεπώς αν θέλουμε να μιλάμε αυστηρά για την κύλιση ως κίνηση, δεν πρέπει να την συνδέσουμε με το εκάστοτε ... «έδαφος».



Σχήμα 3

Από την άλλη μεριά αν ονομάσουμε «έδαφος» για τον τροχό οτιδήποτε «ακουμπά» επάνω του τότε θα δημιουργηθούν άλλα προβλήματα:

- Στο σχήμα 4 έχουμε ένα αρχικό «έδαφος», μια μπλε σανίδα λόγου χάριν, κολλημένο πάνω στον τροχό, ο οποίος κινείται περιστρεφόμενος προς τα δεξιά.

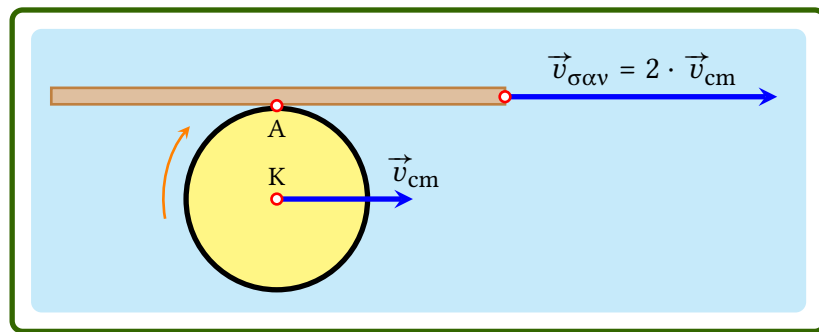


Σχήμα 4

Υπάρχει λοιπόν «έδαφος» και η σχετική ταχύτητα μεταξύ των σημείων επαφής σανίδας («έδαφος») και τροχού είναι μηδέν. Σίγουρα όμως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε, βασιζόμενοι στον παραπάνω ορισμό, ότι ο τροχός κυλιέται ως προς αυτήν την κολλημένη σανίδα.

- Στο σχήμα 5 σε επαφή με τον τροχό, για τον οποίο ισχύει η σχέση μέτρων $v_{cm} = \omega R$, έχουμε μια σανίδα που έχει ταχύτητα $\vec{v}_{σαν} = 2\vec{v}_{cm}$.

Εδώ έχουμε «έδαφος» (σανίδα) και η σχετική ταχύτητα μεταξύ των σημείων επαφής σανίδας («εδάφους») και τροχού είναι μηδέν. Αλλά σίγουρα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε, βασιζόμενοι στον παραπάνω ορισμό, ότι ο τροχός κυλιέται ως προς αυτήν την σανίδα.

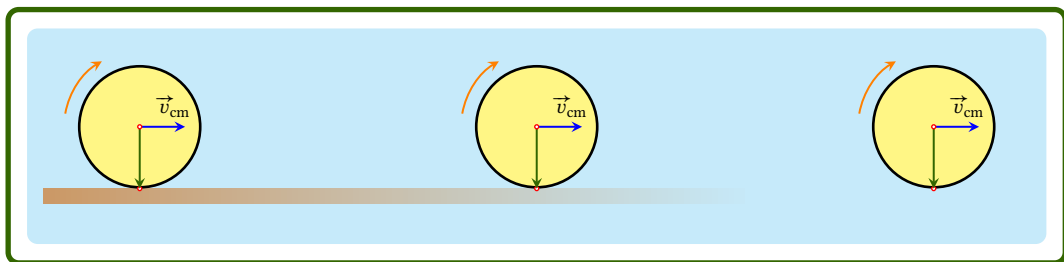


Σχήμα 5

Επιχειρώντας λοιπόν να ορίσουμε την κύλιση τροχού μέσω των εννοιών «έδαφος» και «σχετική ταχύτητα μηδέν» μεταξύ των σημείων επαφής σανίδας («εδάφους») και τροχού, φτάσαμε στο σημείο να μην ξέρουμε τι είναι «έδαφος» για έναν τροχό.

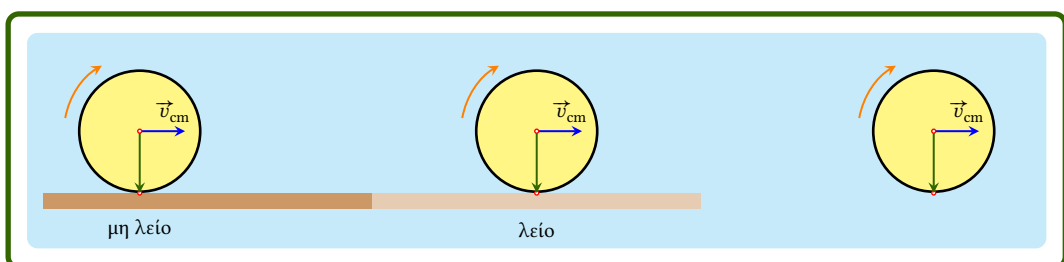
β. Ας πάμε τώρα στο διάστημα ή όπου αλλού

- είτε με το σχήμα 6 όπου ο περιστρεφόμενος τροχός κινείται πάνω σε σανίδα η οποία σβήνει σιγά σιγά



Σχήμα 6

- είτε με το σχήμα 7 όπου ο περιστρεφόμενος τροχός κινείται σε «έδαφος» στο οποίο αλλάζουν όλα ακαριαία



Σχήμα 7

Προφανώς η κίνηση του τροχού δεν είναι δυνατόν να προσδιορίζεται από την ύπαρξη ή μη «εδάφους» και σχετικής ταχύτητας μηδέν μεταξύ των σημείων επαφής «εδάφους» και τροχού.

Ο λόγος είναι απλός:

Όταν η σανίδα («έδαφος») χαθεί η κίνηση του τροχού δεν αλλάζει.

Είναι προφανές λοιπόν από τα παραπάνω ότι ο ορισμός

«Κύλιση ενός τροχού είναι εκείνη η κίνηση, όπου δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των σημείων επαφής $A - A'$ του τροχού και του εδάφους»

πρέπει να απορριφθεί.

Αλλά αφού ο παραπάνω ορισμός είναι απορριπτός, ποιος είναι ο ορισμός της «κύλισης τροχού»;

Αποφεύγοντας να δώσουμε άμεσα έναν ορισμό της κίνησης «κύλιση τροχού», ας αρχίσουμε να αριθμούμε κάποιες προϋποθέσεις που θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας (προκειμένου να εξασφαλίσουμε συνέπεια λόγου) όταν επιχειρήσουμε να καταλήξουμε σε ορισμό:

1. Στον ορισμό της κύλισης δεν πρέπει να χρησιμοποιηθούν έννοιες που δημιουργούν προβλήματα, όπως π.χ. η λέξη «έδαφος»

2. Φυσική κίνησης σώματος κάνει ένας μόνο παρατηρητής και οι έννοιες ή οι εξισώσεις που θα προκύψουν αφορούν έναν και μόνο έναν παρατηρητή

(εδώ θα πρέπει να μην παρασυρθούμε από πιθανούς μετασχηματισμούς κλασικούς ή σχετικιστικούς που συνδέουν δύο παρατηρητές)

Αν αλλάξει ο παρατηρητής πιθανώς να αλλάξει και το είδος της κίνησης του σώματος. Άρα πρωτίστως πρέπει να ορίσουμε παρατηρητή ο οποίος θα αποφανθεί αν υπάρχει κύλιση ή όχι.

3. Έστω ένας παρατηρητής Π για τον οποίο

✓ η ταχύτητα κέντρου μάζας του τροχού είναι v_{cm}

✓ η ακτίνα τροχού είναι R

✓ η γωνιακή ταχύτητα ω του τροχού είναι τέτοια ώστε να πληρείται η σχέση μέτρων

$$v_{cm} = \omega R \quad (1)$$

✓ για την ταχύτητα του τυχαίου σημείου Σ της «περιφέρειας» του τροχού ισχύει

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{R}_\Sigma \quad (2)$$

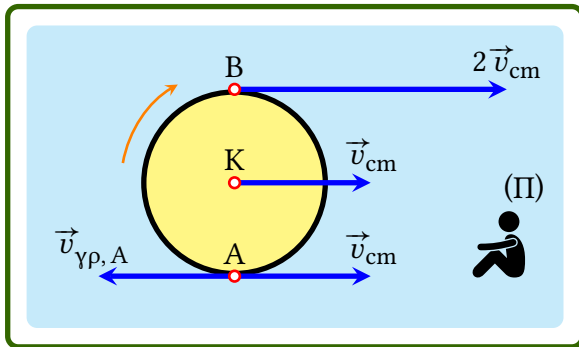
Γι' αυτόν τον αδρανειακό παρατηρητή Π, η σχέση μέτρων $v_{cm} = \omega R$ σημαίνει ότι πάνω στην «περιφέρεια» του τροχού υπάρχει σημείο (ή σημεία πάνω σε γενέτειρα αν ο τροχός έχει πάχος) το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα.

Προσέξτε!

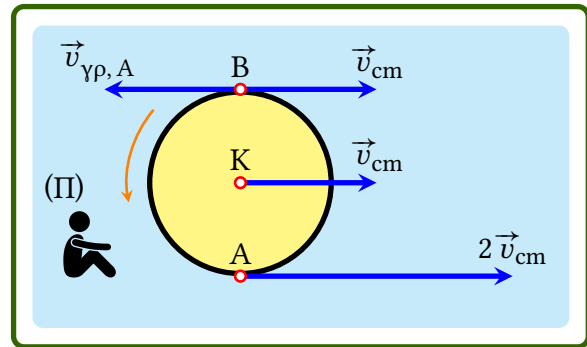
Δεν λέμε ότι είναι μηδέν η σχετική ταχύτητα σημείων επαφής εδάφους-τροχού, αλλά ότι είναι μηδέν η ταχύτητα κάποιου σημείου της «περιφέρειας» ως προς τον συγκεκριμένο παρατηρητή Π που κάνει Φυσική.

Η ουσία δηλαδή δεν είναι ούτε η ύπαρξη εδάφους ούτε το ότι η σχετική κίνηση σημείων επαφής εδάφους-τροχού είναι μηδέν, αλλά η σχέση $v_{cm} = \omega R$ η οποία με τη σειρά της εξασφαλίζει το ότι υπάρχει σημείο της «περιφέρειας» με μηδέν ταχύτητα ως προς τον συγκεκριμένο παρατηρητή Π που κάνει Φυσική.

Έστω ότι για τον παρατηρητή Π των παρακάτω σχημάτων 8 και 9 ισχύουν οι σχέσεις (1) και (2). Τότε η κίνηση του τροχού είναι κύλιση

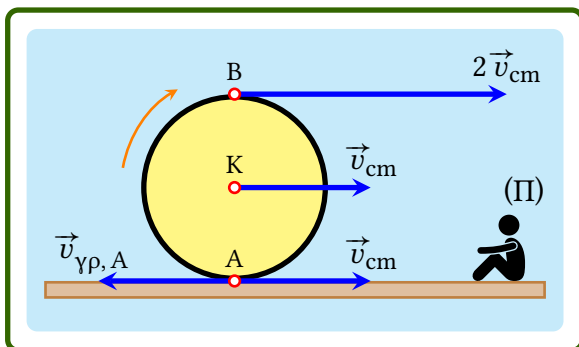


Σχήμα 8

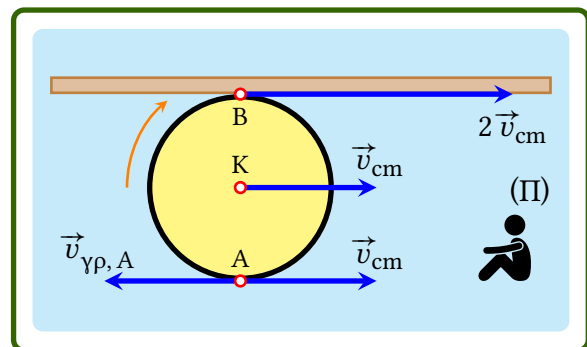


Σχήμα 9

Στο σχήμα 8, αν βάλουμε μια ακίνητη (ως προς τον παρατηρητή Π) λεία σανίδα στο σημείο A (βλέπε σχήμα 10) θα έχουμε **κύλιση (πάνω στη σανίδα) χωρίς ολίσθηση**, ενώ αν βάλουμε τη σανίδα στο σημείο B (βλέπε σχήμα 11) θα έχουμε **κύλιση (πάνω στη σανίδα) με ολίσθηση**



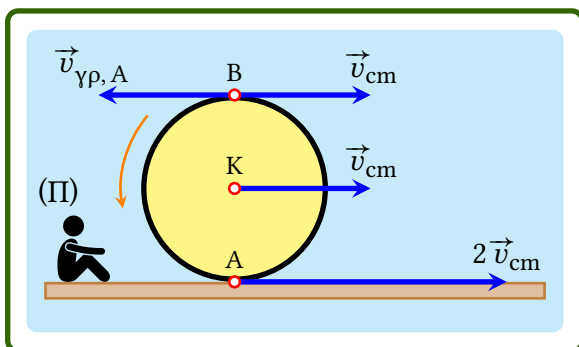
Σχήμα 10



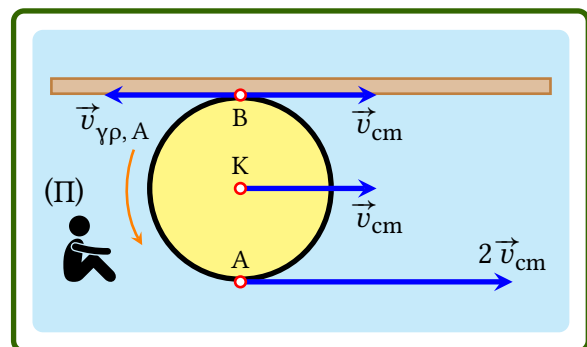
Σχήμα 11

Όμοια

Στο σχήμα 9, αν βάλουμε μια ακίνητη (ως προς τον παρατηρητή Π) λεία σανίδα στο σημείο A (βλέπε σχήμα 12) θα έχουμε **κύλιση (πάνω στη σανίδα) με ολίσθηση**, ενώ αν βάλουμε τη σανίδα στο σημείο B (βλέπε σχήμα 13) θα έχουμε **κύλιση (πάνω στη σανίδα) χωρίς ολίσθηση**



Σχήμα 12



Σχήμα 13

Σημαντικό συμπέρασμα

Η σχέση

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{R}_\Sigma \quad \text{με} \quad v_{\text{cm}} = \omega R_\Sigma = \omega R \quad (3)$$

αποτελεί σύνδεσμο, δηλαδή απαραίτητο μαθηματικό περιορισμό, για την Φυσική της κίνησης του τροχού που ονομάζεται κύλιση.

Ερώτηση 1

Δηλαδή για να χαρακτηριστεί η κίνηση ενός τροχού από κάποιον παρατηρητή Π ως κύλιση ή για να δοθεί ένας συνεπής ορισμός της κύλισης τροχού (σφαίρας, κυλίνδρου κ.λπ) η ουσία είναι η σχέση $\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{R}_\Sigma$ με $v_{\text{cm}} = \omega R_\Sigma = \omega R$;

Απάντηση

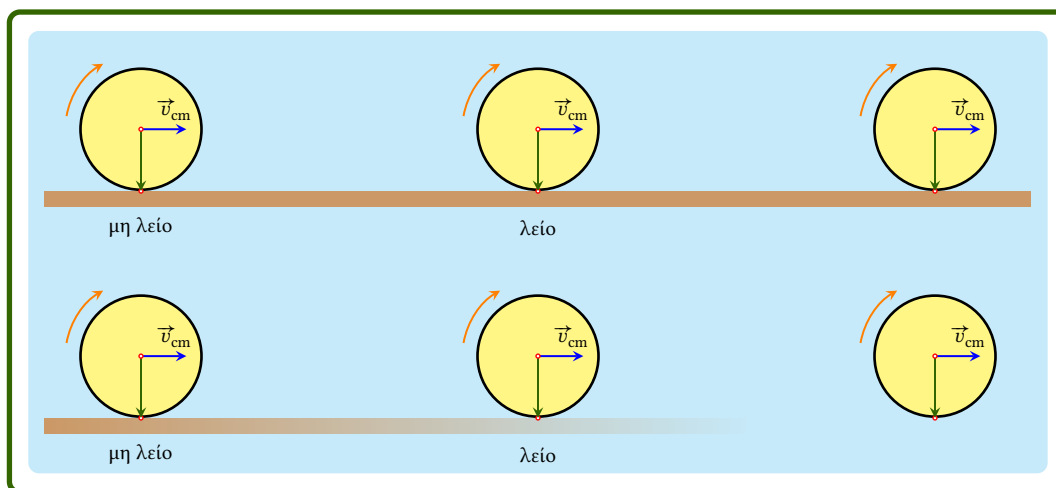
Ναι....

Αυτή είναι η ουσία και αυτή η ουσία δεν υπολογίζει αν έχουμε σανίδες ή εδάφη ή διάστημα ή ... ή....

Είναι μαθηματικός περιορισμός κίνησης ή αλλιώς σύνδεσμος για την κίνηση, αν θέλουμε να την χαρακτηρίσουμε ως κύλιση.

Συνεπώς οποιοσδήποτε ορισμός της κύλισης πρέπει να πάρει υπόψη τη σχέση (3).

Προκειμένου να δώσουμε έμφαση στο ότι η έννοια της «κύλισης» πρέπει οπωσδήποτε να συνδέεται με τον σύνδεσμο (μαθηματικό περιορισμό) που εκφράζει η σχέση (3), ας δούμε το σχήμα 14.



Σχήμα 14

Στην πάνω εικόνα του σχήματος 14 ο τροχός βρίσκεται συνεχώς πάνω στην (τραχιά ή λεία) μπλε σανίδα, «έδαφος» ως την πούμε.

Αν για κάποιον παρατηρητή Π, που καλείται να χαρακτηρίσει την κίνηση, ισχύει η σχέση (3), τότε η κίνηση του τροχού ως προς τον Π είναι κύλιση.

Στην κάτω εικόνα του σχήματος 14 (π.χ. μπορεί να είμαστε στο διάστημα) η σανίδα σβήνει σιγά σιγά.

Αν για κάποιον παρατηρητή Π, που καλείται να χαρακτηρίσει την κίνηση, ισχύει η σχέση (3), τότε η κίνηση του τροχού ως προς τον Π είναι κύλιση.

Ερώτηση 2

Κι αν αντί τροχού έχουμε ένα πλανήτη τι θα πει ο παρατηρητής Π;

Απάντηση

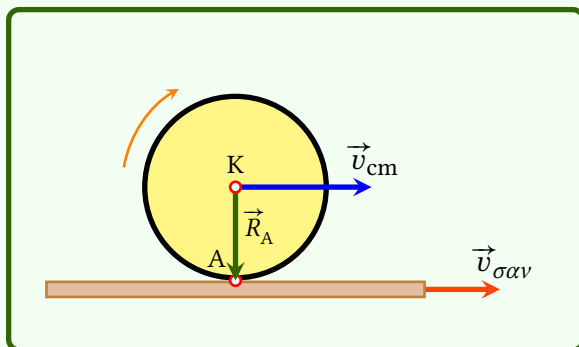
Αν για τον Π και για το τυχαίο σημείο Σ της «περιφέρειας» ισχύει η σχέση (3):

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{R}_\Sigma \quad \text{με} \quad v_{\text{cm}} = \omega R_\Sigma = \omega R \quad (3)$$

τότε ο πλανήτης (σφαίρα) κάνει κύλιση και υπάρχει σημείο Α πάνω στην επιφάνεια του πλανήτη που ως προς τον συγκεκριμένο παρατηρητή Π είναι στιγμιαία ακίνητο, όταν την ίδια στιγμή το αντιδιαμετρικό του σημείου Α θα κινείται με ταχύτητα διπλάσια εκείνης του κέντρου μάζας του πλανήτη.

Ερώτηση 3

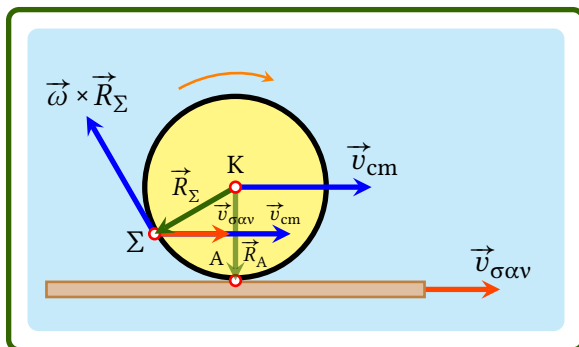
Έστω ότι για κάποιον παρατηρητή Π έχουμε την εικόνα του σχήματος 15, όπου ένας τροχός κινείται περιστρεφόμενος πάνω σε μια «σανίδα» η οποία όμως κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{\text{σαν}}$; Τι κίνηση κάνει ο τροχός ως προς τον παρατηρητή Π;



Σχήμα 15

Απάντηση

Όπως φαίνεται από το σχήμα 16:



Σχήμα 16

για τον παρατηρητή Π και για τα σημεία της «περιφέρειας» του τροχού δεν ισχύει η σχέση

(3), δηλαδή η

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{R}_\Sigma \quad \text{με} \quad v_{\text{cm}} = \omega R_\Sigma = \omega R \quad (3)$$

αλλά η

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times \vec{R}_\Sigma + \vec{v}_{\sigma\alpha\nu} \quad (4)$$

Άρα η κίνηση του τροχού για τον Π δεν είναι κύλιση

Όμως για έναν παρατηρητή, που βρίσκεται πάνω στη σανίδα και είναι ακίνητος ως προς αυτήν, η κίνηση του τροχού είναι κύλιση.

Ερώτηση 4

Γιατί την κύλιση την περιορίζουμε (συνδέουμε) πάντα με κάποια σανίδα, τραπέζι, έδαφος κ.λπ και δεν τη διδάσκουμε πιο γενικά, όπως π.χ. θέτετε εσείς το ζήτημα;

Απάντηση

Γιατί η σανίδα, το τραπέζι, το έδαφος κ.λπ είναι μια καλή παιδαγωγική επιλογή.

Είναι δηλαδή ένας καλός τρόπος να διδάξουμε την κύλιση σε παιδιά Λυκείου.

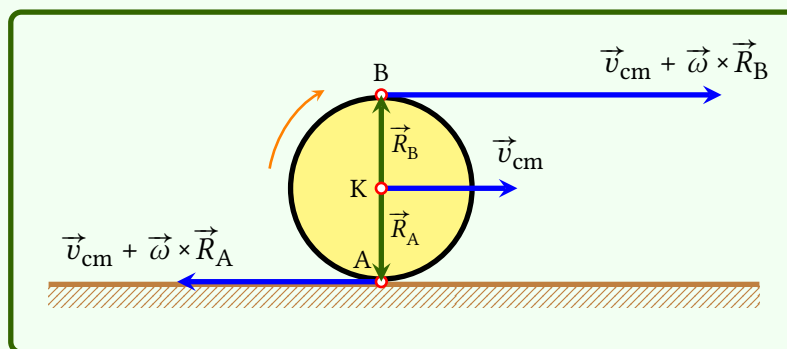
Μην ξεχνάτε ότι το ίδιο κάνουμε και με την απλή αρμονική ταλάντωση.

Αντί να πούμε στα παιδιά ότι α.α.τ. είναι η κίνηση μάζας m σε πεδίο κεντρικής δύναμης $F = -Dx$ (κάτι που ίσως θα τα δυσκόλευε), χρησιμοποιούμε το ελατήριο ως μια καλή επιλογή για τη διδασκαλία αυτής της κίνησης.

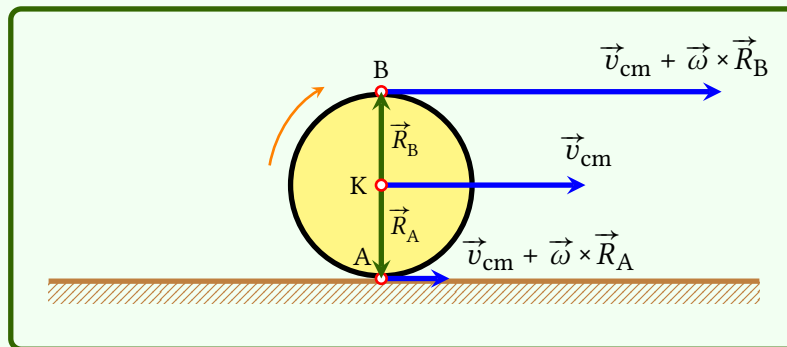
Όμως το ελατήριο είναι ένα φάντασμα ουσιαστικά. Δεν έχει μάζα και δεν αποθηκεύει, ούτε έχει καμιά ενέργεια επάνω του. Είναι μια «αίσθηση» της δύναμης που χρειαζόμαστε. Η μηχανική ενέργεια αφορά μόνο στη μάζα m .

Ερώτηση 5

Πως θα χαρακτηρίζατε την κίνηση του τροχού στα παρακάτω σχήματα 17 και 18;



Σχήμα 17: Ο τροχός περιστρέφεται πάνω σε έδαφος ολισθαίνοντας. Ισχύει $\omega R > v_{\text{cm}}$



Σχήμα 18: Ο τροχός περιστρέφεται πάνω σε έδαφος ολισθαίνοντας. Ισχύει $\omega R < v_{cm}$

Απάντηση

Περιφραστικά και βέβαια αποφεύγοντας τον όρο κύλιση

Θα μπορούσαμε π.χ. να λέγαμε: «περιστρέφεται ολισθαίνοντας όπως φαίνεται στο σχήμα ... και ισχύει ... » ή οτιδήποτε άλλο που δεν θα άφηνε αμφιβολία γι αυτό που θέλουμε να αναδείξουμε.

Ερώτηση 6

Γιατί πρέπει να καταφύγουμε σε όλα αυτά τα πράγματα που λέτε για την κύλιση; Δεν είναι όλα πιο απλά έτσι όπως τα έχουμε τώρα;

Απάντηση

Απλά μπορεί να είναι τα πράγματα. Αλλά αυτά τα «απλά πράγματα» που λέτε και που τα χρησιμοποιούμε μέχρι τώρα δεν μπορούν να σταθούν ως Φυσική της κύλισης, διότι δεν διαθέτουν την αυστηρότητα που απαιτεί η Φυσική από τις λέξεις και τους ορισμούς της όταν επιχειρεί να χαρακτηρίσει κάποια κίνηση.

Αν καταφέρατε να δώσετε έναν συνεπή συλλογιστικά ορισμό της κύλισης με βάσει αυτά τα «απλά πράγματα» που λέτε κανείς δεν θα έχει κανένα πρόβλημα.

Νομίζω όμως ότι γρήγορα θα διαπιστώσετε το διάτρητο του ορισμού που θα δώσετε, κάτι που θα μας γεμίσει όλους με παρερμηνείες, παρεξηγήσεις ή έστω διαφορετικές ερμηνείες.

Σας ρωτάω λοιπόν:

Τι είναι κύλιση;...

Και σας καλώ να δώσετε έναν συνεπή ορισμό της κύλισης με βάσει τα «απλά πράγματα» που αναφέρατε παραπάνω και που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα.

Ερώτηση 7

Πώς σας ήρθε ξαφνικά να κάνετε όλη αυτήν την παρουσίαση-ανάλυση του ορισμού της «κύλισης», τροχού π.χ.;

Απάντηση

Μου ήταν προφανές ότι ούτε στη συνηθισμένη πανεπιστημιακή βιβλιογραφία ούτε στο σχολικό ή τα φροντιστηριακά βιβλία υπήρχε ορισμός της κύλισης π.χ. τροχού.

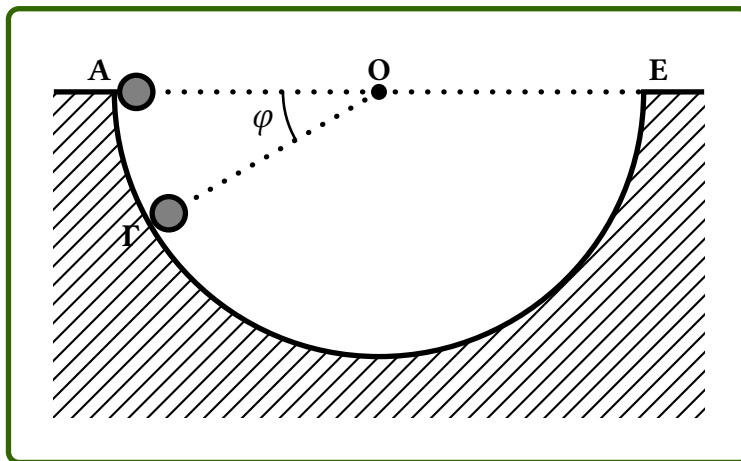
Έτσι έβλεπα ότι η διδασκαλία μας ήταν γεμάτη με ασάφειες και ασυνέπειες.

Κάτω από τέτοιες συνθήκες δεν μπορούσε η χρήση του όρου «κύλιση», ως είδος κίνησης, να ενταχτεί στη Φυσική, αλλά μάλλον σε προσωπικές απόψεις.

Ήμουν σίγουρος λοιπόν ότι η κατάσταση εγκυμονούσε κινδύνους, οι οποίοι σύντομα ανεδείχθησαν όπως π.χ με την παρακάτω περίπτωση:

Θέμα Δ Πανελλαδικών Εξετάσεων Φυσικής 2015:

Από το εσωτερικό άκρο A ενός ημισφαιρίου ακτίνας $R = 1,6\text{ m}$ αφήνεται να κυλήσει μία συμπαγής μικρή σφαίρα μάζας $m = 1,4\text{ kg}$ και ακτίνας $r = \frac{R}{8}$. Το ημισφαίριο είναι βυθισμένο στο έδαφος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 19, και η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση.



Σχήμα 19

Δ1. Να εκφράσετε τη στατική τριβή T_s που ασκείται στη σφαίρα σε συνάρτηση με το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει η ακτίνα OG του ημισφαιρίου με την ευθεία AE της επιφάνειας του εδάφους.

Δ2. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί η ημισφαιρική επιφάνεια στη σφαίρα όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο Γ όπου $\varphi = 30^\circ$ (Σχήμα 19).

.....

Δ3.

Δ4.

.....

Τότε (Ιούνιος 2015) είχε γίνει μεγάλη συζήτηση ανάμεσα σε Φυσικούς για το αν το θέμα Δ ήταν σαφές ή όχι και για το αν έπρεπε να γίνει βαθμολόγησή του ή όχι.

Πιο συγκεκριμένα:

Αρκετοί συνάδελφοι είχαν υποστηρίξει κάτι όπως το παρακάτω:

«... Τα Δ1 και Δ2 είναι λανθασμένα γιατί δεν είναι δυνατόν να αφήνεται η σφαίρα στο σημείο Α χωρίς ταχύτητα και να γίνεται κύλιση χωρίς ολίσθηση. Στην αρχή η σφαίρα θα ολισθαίνει και κάποια στιγμή θα αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση ...»

Η δικιά μου γνώμη τότε ήταν κάτι τέτοιο:

... Δεν υπάρχει επιστημονικό λάθος στο Θέμα Δ σχετικό με την κύλιση.

Το πρόβλημα είναι αποκλειστικά δικό μας.

Το Θέμα Δ «αδειάζει» κυριολεκτικά εμάς και μόνο εμάς, διότι η διδασκαλία μας σχετικά με την κύλιση ήταν και παραμένει ρευστότατη και γεμάτη ασάφειες.

Δεν υπήρξαμε (για ευνόητους λόγους) ΠΟΤΕ ξεκάθαροι απέναντι στα παιδιά γιατί δεν είχαμε, δεν αναζητήσαμε και ΠΟΤΕ δεν δώσαμε συνεπή ορισμό της κύλισης με αποτέλεσμα η διδασκαλία μας να είναι ασυνεπής από άποψη Φυσικής, γεγονός που σήμερα (2015) μας οδήγησε σε γκρίνιες.

Υπήρξαμε λοιπόν ασυνεπείς ως Φυσικοί και τα θέματα των πανελληνίων εξετάσεων (η μόνη παραπαιδεία στην Ελλάδα) μας «έσφαξαν» με το βαμβάκι ... Και τώρα τα ρίχνουμε δήθεν στη διατύπωση αντί να προβληματιστούμε με το τι δεν πήγε καλά ...

Γίνομαι πιο σαφής:

Από τη στιγμή που μια άσκηση όχι απλά αναφέρει, αλλά τονίζει σε δύο σημεία ότι η μικρή σφαίρα κάνει κύλιση (το «χωρίς ολίσθηση» είναι περιττό) θέτει αμέσως ως μαθηματικό περιορισμό ή αλλιώς ως σύνδεσμο Φυσικής τη σχέση (3) και άρα την $v_{cm} = \omega R$.

Συνεπώς η ισχύς του $v_{cm} = \omega R$ δεν είναι διαπραγματεύσιμη, αλλά κορυφαίο δεδομένο της άσκησης που κανείς δεν έχει δικαίωμα να αμφισβητήσει.

Φαντάζεστε σε μια άσκηση μαθηματικών να δοθεί ο περιορισμός $x > 8$ και να αρχίσουμε να γκρινιάζουμε ότι δεν είναι δυνατόν το x να γίνει μεγαλύτερο του 8 αμέσως, αλλά θα πρέπει πρώτα να περάσει από τις τιμές 2, 3, ... κ.λπ;

Θα ήταν εξωφρενικό κάτι τέτοιο.

Κοντολογία:

Για τη μικρή σφαίρα δίνεται άμεση κύλιση. Επομένως κανείς (ούτε καθηγητής, ούτε μαθητής, ούτε ...) δεν πρέπει να ασχοληθεί με το αν ισχύει ή όχι αμέσως το $v_{cm} = \omega R$, αλλά να το πάρει ως δεδομένο το ότι ισχύει.

Τα όρια ενός μαθηματικού περιορισμού (συνδέσμου) είναι τα όρια που επιβάλλει στη λύση της άσκησης αυτός περιορισμός και δεν πρέπει να αμφισβητείται.

.....

.....

(Αυτή η εργασία είχε σκοπό να υποστηρίξει τις θέσεις μου στην τότε κουβέντα μεταξύ συναδέλφων. Άρα είναι μια παλιά δουλειά μου.)

Ιούνιος 2015

Θρασύβουλος Μαχαίρας